Teoría de números algebraicos
Tarea 3

Alexey Beshenov (alexey.beshenov@cimat.mx)

2 de septiembre de 2020

Fecha límite: viernes, 11 de septiembre.

Consideremos el campo ciclotómico $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$. Más adelante veremos un modo adecuado para probar que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_8]$, pero por el momento se puede aceptar este resultado.

Ejercicio 3.1. Usando el teorema de Kummer–Dedekind, describa las factorizaciones de $p\mathcal{O}_K$ en ideales primos para diferentes primos racionales p.
(La respuesta depende de p mód 8.)

Ejercicio 3.2. Encuentre las subextensiones $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{Q}(\zeta_8)$ y las factorizaciones de $p\mathcal{O}_F$ para cada una de estas.
(Para encontrar las subextensiones, use la teoría de Galois.)

Ejercicio 3.3. Considerando la descomposición de primos racionales en $\mathcal{O}_K$, demuestre que $\zeta_p \notin \mathbb{Q}(\zeta_q)$ para diferentes primos impares $p \neq q$.

Ejercicio 3.4. Para el campo ciclotómico $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ es cíclico, así que la teoría de Galois implica que existe un subcampo cuadrático único $F \subset K$. Considerando la factorización de primos racionales en $\mathcal{O}_F$ y $\mathcal{O}_K$, demuestre que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$, donde $p^* = (-1)^{(p-1)/2} p$.
(Sugerencia: si q se ramifica en $\mathcal{O}_F$, entonces q se ramifica en $\mathcal{O}_K$.)