Teoría de números algebraicos
Tarea 6

Alexey Beshenov (alexey.beshenov@cimat.mx)

8 de octubre de 2020

Ejercicio 6.1. Para un campo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ encuentre n tal que $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Ejercicio 6.2. Para $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ calcule el grupo $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ y describa los subcampos de K.

Ejercicio 6.3. Consideremos el campo bicuadrático $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$.

1) Describa cómo los primos racionales se factorizan en $\mathcal{O}_K$.

2) Calcule la densidad de primos que corresponden a cada tipo de descomposición.

Ejercicio 6.4. Sea p un número primo y χ el carácter de Dirichlet de orden 2 mód p, definido por el símbolo de Legendre $\chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$.

1) Demuestre que $\exp(g(\chi)\, L(1,\chi)) = \prod_n (1 - \zeta_p^n) \prod_r (1 - \zeta_p^r)^{-1}$, donde $g(\chi) = \sum_{1 \le a \le p-1} \chi(a)\, \zeta_p^a$, y los productos son sobre los no-residuos y residuos cuadráticos mód p respectivamente.

2) Use la parte anterior para calcular $L(1,\chi)$, donde χ es el carácter de orden 2 mód 5. (Para el valor numérico en PARI/GP, basta digitar `lfun(5,1)`)

Ejercicio 6.5. Consideremos funciones $f, g\colon \mathbb{Z}_{>1} \to \mathbb{C}$ y las series de Dirichlet correspondientes $F(s) = \sum_{n\ge 1} \frac{f(n)}{n^s}$ y $G(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{g(n)}{n^s}$.

1) Demuestre que cuando las series convergen absolutamente en s, se tiene $F(s) \cdot G(s) = \sum_{n\ge 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$, donde $(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$.

2) Sean $\mu(n)$ la función de Möbius, $\tau(n)$ el número de divisores, $\sigma(n) = \sum_{d\mid n} d$ la suma de divisores, y $\phi(n)$ la función de Euler. Demuestre que

$$\sum_{n\ge 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad \sum_{n \ge 1} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2, \quad \sum_{n\ge 1} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\, \zeta(s-1), \quad \sum_{n \ge 1} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$