Cuadrados mágicos y matrices de permutación

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

13 de agosto de 2016

Un **cuadrado mágico** es una tabla de $n \times n$ llenada con números naturales arbitrarios (posiblemente 0) tal que las sumas de filas y columnas son iguales al mismo número m. Por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 15 &= 4+9+2 = 3+5+7 = 8+1+6 \quad \text{(sumas de filas)} \\ &= 4+3+8 = 9+5+1 = 2+7+6 \quad \text{(sumas de columnas)} \end{aligned}$$

Notemos que si $m = 1$, entonces en cada cuadrado mágico de $n \times n$ con suma 1, los elementos de cada fila y cada columna deben ser 0, excepto uno, que debe ser igual a 1. Cuadrados de esta forma son conocidos como **matrices de permutación**.

Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos 2 posibilidades, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ y $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$, y para $n = 3$ tenemos 6 posibilidades:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Ejercicio. *Demuestre que hay $n!$ matrices de permutación de $n \times n$.*

Hay una biyección

$$\text{matrices de permutación de } n \times n \quad \longleftrightarrow \quad S_n := \{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\}.$$

Entonces a cada permutación $\sigma \in S_n$ corresponde una matriz de permutación P_σ.

Cuando tenemos dos tablas de $n \times n$, tiene sentido tomar su suma o diferencia (elemento por elemento, por ejemplo $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$) o multiplicar por algún número (por ejemplo, $2 \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline \end{array}$).

Hoy deseo demostrar la siguiente propiedad curiosa:

Teorema. *Cada cuadrado mágico es una suma de matrices de permutación.*

Aquí hay un ejemplo de esta descomposición:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&0\\\hline 2&1&2\\\hline 2&0&3\\\hline\end{array} = 2\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline 1&0&0\\\hline\end{array} + 2\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 1&0&0\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array}$$

En general, esta expresión no es única. Por ejemplo, el cuadrado $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array}$ tiene dos descomposiciones diferentes:

$$\begin{aligned}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 0&1&0\\\hline 1&0&0\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 1&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline\end{array} + 7\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline 1&0&0\\\hline\end{array} + 2\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 1&0&0\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array} + 4\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array}\\ &= 2\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 0&1&0\\\hline 1&0&0\\\hline\end{array} + 6\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline 1&0&0\\\hline\end{array} + 3\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 1&0&0\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&0\\\hline 0&0&1\\\hline 0&1&0\\\hline\end{array} + 3\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array}\end{aligned}$$

Ejercicio. *Demuestre que la suma de matrices de permutación es siempre mágica. (Es la implicación fácil del teorema.)*

Por ciertas razones (que voy a explicar en otra lección), es útil normalizar cada cuadrado mágico: si su suma es m, dividimos sus elementos por m. Luego, tenemos una tabla donde suma de fila y cada columna es 1. Por ejemplo,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array} = 15\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4/15&3/5&2/15\\\hline 1/5&1/3&7/15\\\hline 8/15&1/15&2/5\\\hline\end{array}$$

Una tabla que satisface esta condición se llama **matriz doblemente estocástica**. En particular, cada matriz de permutación es doblemente estocástica. Se ve que nuestro teorema es una consecuencia del siguiente:

Teorema de Birkhoff–von Neumann. *Cada matriz doblemente estocástica A puede ser escrita como una combinación de matrices de permutación P_σ con coeficientes $\lambda_\sigma \geq 0$ tales que $\sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma = 1$:*

$$A = \sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma P_\sigma \quad \text{para algunos coeficientes } \lambda_\sigma \geq 0 \text{ y } \sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma = 1.$$

En general, una suma $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i \mathbf{x}_i$ con coeficientes no negativos $\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i = 1$ se llama una **combinación convexa** de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Ejercicio. *Si $A_1, \ldots, A_n$ son matrices doblemente estocásticas, entonces cada combinación convexa $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i A_i$, donde $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$, es también doblemente estocástica. En particular, combinaciones convexas de matrices de permutación son matrices doblemente estocásticas.*

La parte difícil es de ver que para cada matriz doblemente estocástica A se puede encontrar matrices de permutación P_σ y coeficientes apropiados $\lambda_\sigma \geq 0$, $\sum_\sigma \lambda_\sigma = 1$, de tal manera que $A = \sum_\sigma \lambda_\sigma P_\sigma$. Este va a ser nuestro objetivo de hoy. Primero veamos que es suficiente de demostrar el

Lema clave. *Sea $A = [x_{ij}]$ una matriz doblemente estocástica. Entonces existe una matriz de permutación $P = [p_{ij}]$ tal que $p_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ij} \neq 0$.*

Veamos que este resultado es suficiente para demostrar el teorema de Birkhoff–von Neumann. Si para una matriz doblemente estocástica A tenemos tal matriz de permutación P, consideramos

$$\lambda := \min_{1 \le i,j \le n} \{x_{ij} \mid p_{ij} \neq 0\}.$$

Notamos que es un número positivo. Sean p, q índices tales que $\lambda = x_{pq}$. Si $\lambda = 1$, entonces A es una matriz de permutación y la afirmación del teorema es trivial. Si $\lambda \neq 1$, consideramos la matriz doblemente estocástica

$$A' := \frac{1}{1-\lambda}\,(A - \lambda P).$$

Tenemos la combinación convexa

$$A = (1-\lambda)\,A' + \lambda\,P,$$

donde P es una matriz de permutación y A' es una matriz doblemente estocástica y observamos que $x'_{pq} = 0$ porque $x_{pq} = \lambda$, entonces A' tiene un coeficiente nulo más que A. Esto significa que podemos aplicar el mismo procedimiento a A' y el proceso se termina en cierto punto porque cada vez la matriz A' va a tener más ceros. ∎

Por ejemplo, consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$. Según la demostración de arriba, para escribirla como una combinación convexa de matrices de permutación, tenemos que escoger una matriz de permutación cuyos coeficientes no nulos corresponden a coeficientes no nulos en nuestra matriz. El lema (que todavía no hemos demostrado) nos dice que es siempre posible. Tomemos por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos la combinación convexa

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, para la primera matriz de la suma se obtiene una descomposición convexa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración del lema clave

Nuestro lema sobre matrices de permutación se demuestra usando un famoso resultado combinatorio.

Les recuerdo que un **grafo bipartito** $G = (V, E)$ es un grafo tal que su conjunto de vértices es una unión disjunta $V = X \sqcup Y$ tal que todas las aristas son de la forma (x, y) donde $x \in X$ e $y \in Y$.

Para un subconjunto $W \subset V$ su **entorno** $N_G(W)$ es el conjunto de los vértices adyacentes a los vértices de W:

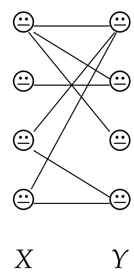
$$N_G(W) := \{v \in V \mid (u, v) \in E \text{ para algún } u \in W\}.$$

Teorema del matrimonio. *Sea $G = (X \sqcup Y, E)$ un grafo bipartito con $|X| = |Y|$. Supongamos que*

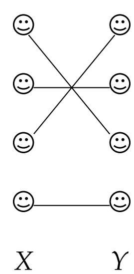
$$|N_G(W)| \ge |W| \quad \textit{para cada } W \subset X.$$

*Entonces existe un **emparejamiento perfecto**, es decir una biyección $\phi\colon X \to Y$ tal que $(x, \phi(x)) \in E$ para cada $x \in X$.*

Por ejemplo, si tenemos dos grupos de personas X e Y, ponemos una arista entre $x \in X$ e $y \in Y$ si x e y se gustan y quieren casarse.



El teorema de Hall dice que si a cada grupo de personas $W \subset X$ le gustan por lo menos $|W|$ personas del grupo Y, entonces todos del grupo X pueden casarse. En nuestro caso tenemos la siguiente solución:



No voy a recordar la demostración; voy a aplicar el teorema a nuestra situación. Para una matriz doblemente estocástica $A = [x_{ij}]$ consideramos el grafo bipartito cuyos vértices representan las filas y columnas:

$$V := F \sqcup C := \{f_1, \ldots, f_n\} \sqcup \{c_1, \ldots, c_n\}.$$

Las aristas corresponden a coeficientes no nulos en el grafo:

$$E := \{(f_i, c_j) \mid x_{ij} \neq 0\}.$$

Primero verifiquemos que este grafo satisface la condición $|N(I)| \ge |I|$ para cada $I \subset F$, es decir, si escogemos ℓ filas $I = \{f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell}\}$, entonces hay por lo menos ℓ columnas diferentes con coeficientes no nulos en las intersecciones con I. En efecto, notamos que

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in N(I)}} x_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in N(\{i\})} x_{ij} = \sum_{i \in I} \underbrace{\sum_{1 \le j \le n} x_{ij}}_{=1} = |I|,$$

porque la matriz es doblemente estocástica. De la misma manera, para cada $J \subset C$ tenemos

$$|J| = \sum_{\substack{j \in J \\ i \in N(J)}} x_{ij}$$

Para $I \subset F$ notamos que $I \subseteq N(N(I))$, y por lo tanto

$$|N(I)| = \sum_{\substack{j \in N(I) \\ i \in N(N(I))}} x_{ij} \geq \sum_{\substack{j \in N(I) \\ i \in I}} x_{ij} = |I|.$$

Entonces $|N(I)| \geq |I|$ y podemos aplicar el teorema del matrimonio para demostrar que existe un emparejamiento perfecto $M \subset E$. Consideramos la matriz $P = [p_{ij}]$ definida por

$$p_{ij} := \begin{cases} 1, & (f_i, c_j) \in M, \\ 0, & (f_i, c_j) \notin M. \end{cases}$$

Si M es un emparejamiento perfecto, entonces cada fila y cada columna de P tiene exactamente un coeficiente 1; es decir, P es una matriz de permutación. Si $x_{ij} = 0$, entonces por la definición del grafo, $(f_i, c_j) \notin E$ y $p_{ij} = 0$, como deseamos. ■