Álgebra homológica, día 1

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

8 de agosto de 2016

0. Definiciones básicas

Por la letra R siempre vamos a denotar un anillo. Para nosotros todos los anillos tienen unidad $1 \in R$ y son conmutativos. El álgebra homológica para módulos sobre anillos no conmutativos también tiene perfecto sentido (y de hecho la mayoría de nuestros argumentos no tiene nada que ver con la conmutatividad de R), pero en nuestras aplicaciones R va a ser conmutativo.

Las letras $K, L, M, N, \ldots$ normalmente van a denotar R-módulos, o objetos de cualquier categoría aditiva o abeliana (que vamos a definir más adelante). Esto puede ayudar psicológicamente a los principiantes: cuando hay una definición o proposición sobre categorías aditivas o abelianas, uno puede reflexionar sobre su significado para R-módulos o tratar de encontrar demostración más explícita para el caso de R-módulos.

En general vamos a ignorar los detalles sutiles de la teoría de conjuntos. Vamos a necesitar el **lema de Zorn**. A saber, si $(X, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un subconjunto $T \subset X$ es una **cadena** si para cada par de elementos $t, u \in T$ tenemos $t \preceq u$ o $u \preceq t$. Supongamos que para cada cadena no vacía $T \subset X$ existe una **cota superior** $x \in X$, que es un elemento tal que $t \preceq x$ para cada $t \in T$. Entonces el lema de Zorn dice que X contiene un **elemento maximal**, es decir un $m \in X$ para el cual no existe $x \in X$ tal que $m \prec x$.

En esta sección voy a recordar algunas definiciones y construcciones para R-módulos.

0.1. Definición. La estructura de un R**-módulo** M consiste en los siguientes datos.

- M es un grupo abeliano, es decir para cada $x, y \in M$ tenemos $x + y \in M$ y los axiomas habituales.
- Tenemos una acción de R sobre M que se denota por $r \cdot x$ para $r \in R$ y $x \in M$ y que satisface para cualesquiera $r, r_1, r_2 \in R$ y $x, y \in M$

$$\begin{aligned}(r_1 r_2) \cdot x &= r_1 \cdot (r_2 \cdot x),\\ 1 \cdot x &= x,\\ (r_1 + r_2) \cdot x &= r_1 \cdot x + r_2 \cdot x,\\ r \cdot (x + y) &= r \cdot x + r \cdot y.\end{aligned}$$

Un **morfismo** entre dos R-módulos es una aplicación $f\colon M \to N$ que es R**-lineal**, es decir para cualesquiera $x, y \in M$ y $r \in R$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x).$$

El conjunto de morfismos entre R-módulos $M \to N$ se denota por $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. La composición de dos morfismos $f: M \to N$ y $g: N \to L$ se denota por $g \circ f: M \to L$. Esto define una ley de composición asociativa

$$\circ: \mathrm{Hom}_R(M, N) \times \mathrm{Hom}_R(N, L) \to \mathrm{Hom}_R(M, L)$$

(es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$). Tenemos el morfismo identidad $\mathrm{id}_N: N \to N$ tal que $\mathrm{id}_M \circ f = f$ y $g \circ \mathrm{id}_N = g$.

Como siempre, un **isomorfismo** de R-módulos $f: M \to N$ es un morfismo que tiene un morfismo inverso $f^{-1}: N \to M$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.

0.2. Ejemplo. Si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces un $\mathbb{K}$-módulo es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. ▲

Los R-módulos son como espacios vectoriales, pero definidos sobre anillos. Espero que el lector conozca álgebra lineal básica, sabe multiplicar matrices, etc. Sin embargo, les advierto desde el principio que casi todas las propiedades de R-módulos que van a tener un papel fundamental en este curso son banales en el caso $R = \mathbb{K}$.

0.3. Ejemplo. Si $R = \mathbb{Z}$, entonces un $\mathbb{Z}$-módulo es la misma cosa que un grupo abeliano. ▲

0.4. Definición. Para dos módulos se dice que $M \subset N$ es un **submódulo** de N si M es también un módulo respecto a la misma estructura de grupo abeliano y acción de R.

0.5. Observación. *Si $M \subset N$ es un R-submódulo, entonces se puede formar el cociente N/M como grupo abeliano, y luego se ve que N/M tiene una estructura natural de R-módulo.*

0.6. Ejemplo. Si R es un anillo conmutativo y $I \subset R$ es un ideal, entonces I es un R-submódulo de R y el anillo R/I es también un R-módulo. ▲

Una clase importante de módulos son los módulos libres:

0.7. Definición. Sea X un conjunto (posiblemente infinito). Entonces el **módulo libre** $R\langle X\rangle$ generado por los elementos de X consiste de sumas finitas formales $\sum_i r_i \cdot x_i$ donde $x_i \in X$ y $r_i \in R$. El elemento cero es la suma donde $r_i = 0$ para cada i.

0.8. Observación (Propiedad universal de los módulos libres). *La aplicación de conjuntos*

$$\begin{aligned} X &\to R\langle X\rangle, \\ x &\mapsto 1 \cdot x \end{aligned}$$

tiene la siguiente propiedad universal: cada aplicación de X a otro R-módulo M se factoriza de modo único a través de $X \to R\langle X\rangle$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & M \\ R\langle X\rangle \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

(Aquí la flecha punteada es un morfismo de R-módulos y otras flechas son aplicaciones entre conjuntos.)

0.9. Ejercicio. *$R\langle X\rangle$ se caracteriza de modo único, salvo isomorfismo, por la propiedad de arriba.*

0.10. Ejemplo. Sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ todo módulo es libre. Es lo que se estudia en el álgebra lineal: en cada espacio vectorial se puede escoger una base. ▲

Los R-módulos y morfismos entre ellos tienen ciertas propiedades muy especiales que van a jugar el papel principal en todo nuestro curso.

0.11. Observación. *Cada conjunto* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *es un grupo abeliano con adición "punto por punto"*

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m),$$

el cero es el morfismo $0\colon M \to N$ *definido por* $m \mapsto 0$ *y el morfismo opuesto está definido por* $(-f)(m) := -f(m)$. *La estructura de grupo abeliano es distributiva respecto a la composición:*

$$(g+g')\circ f = g\circ f + g'\circ f \quad y \quad g\circ (f+f') = g\circ f + g\circ f'.$$

$$M \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} N \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} L$$

En particular, el conjunto $\operatorname{End}(M) := \operatorname{Hom}_R(M,M)$ forma un anillo respecto a la adición de morfismos y la composición "$\circ$" como multiplicación (¡normalmente no conmutativa!). Notamos que una acción de R sobre M es la misma cosa que un homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \phi\colon R &\to \operatorname{End}(M),\\ r &\mapsto (\text{acción por } r\colon M \to M). \end{aligned}$$

De hecho, $\phi(r_1)\circ\phi(r_2) = \phi(r_1 r_2)$: la acción por $r_1 r_2$ es la acción por r_2 seguida por la acción por r_1.

0.12. Observación. *Sean M y N dos R-módulos. El conjunto de todos los morfismos R-lineales $f\colon M \to N$ es naturalmente un R-módulo que vamos a denotar por* $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)$, *con la acción de R definida por*

$$(r\cdot f)(m) := f(r\cdot m).$$

Demostración. De hecho, se ve que

$$\begin{aligned} (r_1\cdot(r_2\cdot f))(m) &= (r_2\cdot f)(r_1\cdot m)\\ &= f(r_2\cdot r_1\cdot m)\\ &= f(r_2 r_1\cdot m)\\ &= f(r_1 r_2\cdot m)\\ &= (r_1 r_2\cdot f)(m), \end{aligned}$$

y de la misma manera se puede verificar otros axiomas. ∎

Escribimos "$\underline{\operatorname{Hom}}_R$" en vez de "$\operatorname{Hom}_R$" para subrayar el hecho de que $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)$ no es simplemente un conjunto o grupo abeliano sino también un R-módulo. Esto es llamado el **Hom interno**.

Un comentario pedante para evitar posibles confusiones.

En realidad, lo que hemos definido se llama **R-módulo izquierdo**, porque la acción de R se escribe a la izquierda: $r\cdot x$. Hay también **R-módulos derechos**, donde la acción se escribe como $x\cdot r$. El axioma "$(r_1r_2)\cdot x = r_1\cdot(r_2\cdot x)$" en el caso derecho se vuelve "$x\cdot(r_1r_2) = (x\cdot r_1)\cdot r_2$" que no es la misma cosa: en el caso izquierdo la acción de r_1r_2 es la acción de r_2 seguida por la acción de r_1, y en el caso derecho es lo contrario. Si el anillo R es conmutativo y $r_1 r_2 = r_2 r_1$, entonces no hay diferencia entre módulos izquierdos y derechos. Por eso en nuestros apuntes todos los módulos van a ser izquierdos.

En realidad, si M y N son módulos izquierdos sobre un anillo no conmutativo R, el módulo $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ naturalmente tiene acción de R *por la derecha* por $(f\cdot r)(m) := f(r\cdot m)$. Y *solo para escribir la acción de R sobre $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ por la izquierda*, hemos usado arriba la identidad $r_1 r_2 = r_2 r_1$.

No voy a hablar más de la izquierda y la derecha y siempre voy a trabajar con módulos izquierdos, pero esto no quiere decir que las construcciones de abajo no funcionan para anillos no conmutativos. Si el curso fuera más largo, pondría más atención y no usaría la hipótesis que R es conmutativo.

0.13. Observación (Funtorialidad de $\underline{\mathrm{Hom}}$). *1) Sea M un R-módulo fijo. Entonces cada morfismo de R-módulos $f\colon N\to N'$ induce un morfismo de R-módulos*

$$f_* := f\circ - \colon \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N'),$$
$$(M \xrightarrow{h} N) \mapsto (M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{f} N')$$

Esta correspondencia satisface

$$(\mathrm{id}_N)_* = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)}, \quad (g\circ f)_* = g_*\circ f_*.$$

2) Sea N un R-módulo fijo. Entonces cada morfismo de R-módulos $f\colon M\to M'$ induce un morfismo de R-módulos en la otra dirección

$$f^* := -\circ f\colon \underline{\mathrm{Hom}}_R(M',N) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N),$$
$$(M' \xrightarrow{h} N) \mapsto (M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{h} N)$$

Esta correspondencia satisface

$$\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)}, \quad (g\circ f)^* = f^*\circ g^*$$

Demostración. Por ejemplo, en el primer caso la formula $(\mathrm{id}_N)_* = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)}$ es evidente y por otro lado

$$(g\circ f)_*(h) = (g\circ f)\circ h = g\circ (f\circ h) = g\circ f_*(h) = g_*\circ f_*(h).$$

El hecho de que f induzca un *morfismo de módulos* f_* es una consecuencia de la formula

$$f\circ (h+h') = f\circ h + f\circ h'.$$

■

0.14. Definición. Sean M y N dos R-módulos. El **producto tensorial** $M\otimes_R N$ es el grupo abeliano libre generado por los símbolos $m\otimes n$ para todo $m\in M$ y $n\in N$ módulo las relaciones

$$(m_1+m_2)\otimes n = m_1\otimes n + m_2\otimes n,$$
$$m\otimes (n_1+n_2) = m\otimes n_1 + m\otimes n_2,$$
$$(r\cdot m)\otimes n = m\otimes (r\cdot n).$$

(Es decir, se toma el cociente por el subgrupo generado por elementos de la forma $(m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n$, $m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2$, $(r \cdot m) \otimes n - m \otimes (r \cdot n)$.) Entonces cada elemento $x \in M \otimes_R N$ puede ser expresado (¡no necesariamente de modo único!) como una suma finita de la forma $x = \sum_i m_i \otimes n_i$. Además, definamos la acción de R sobre $M \otimes_R N$ mediante

$$r \cdot x = r \cdot (\sum_i m_i \otimes n_i) := \sum_i r \cdot m_i \otimes n_i.$$

Puede verse que esta definición no depende de la expresión particular $x = \sum_i m_i \otimes n_i$ y nos da una estructura de R-módulo.

0.15. Ejemplo. Si m y n son dos números coprimos, entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$. En efecto, tenemos $1 = a\,m + b\,n$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$, por lo cual para cada $x \otimes y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x \otimes y &= 1 \cdot (x \otimes y) \\ &= (a\,m + b\,n) \cdot (x \otimes y) \\ &= a\,m \cdot (x \otimes y) + b\,n \cdot (x \otimes y) \\ &= (a\,\underbrace{m \cdot x}_{0}) \otimes y + x \otimes (b\,\underbrace{n \cdot y}_{0}) \\ &= 0 \otimes y + x \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

▲

0.16. Ejercicio. *En general, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ donde $\ell = (m, n)$ es el máximo común divisor de m y n. Este grupo cíclico está generado por $1 \otimes 1$.*

0.17. Observación (Funtorialidad de $\otimes$). *1) Sea N un R-módulo fijo y $f\colon M \to M'$ un morfismo de R-módulos. Entonces f induce un morfismo de R-módulos*

$$\begin{aligned} f_* := f \otimes \mathrm{id}_N \colon M \otimes_R N &\to M' \otimes_R N, \\ m \otimes n &\mapsto f(m) \otimes n. \end{aligned}$$

2) Sea M un R-módulo fijo y $f\colon N \to N'$ un morfismo de R-módulos. Entonces f induce un morfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} f_* := \mathrm{id}_M \otimes f \colon M \otimes_R N &\to M \otimes_R N', \\ m \otimes n &\mapsto m \otimes f(n). \end{aligned}$$

(Obviamente) todo esto satisface

$$\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}, \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

0.18. Observación (Adjunción entre $\otimes$ y $\underline{\mathrm{Hom}}$). *Sean L, M, N tres R-módulos. Tenemos una biyección entre conjuntos de morfismos*

$$\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N))$$

que es natural en el siguiente sentido:

1) *Cada morfismo de R-módulos $f\colon L \to L'$ induce el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)) \\
\mathrm{Hom}_R(L' \otimes_R M, N) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, "-\circ(f\otimes \mathrm{id}_M)"] & \mathrm{Hom}_R(L', \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)) \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

2) *Cada morfismo de R-módulos $f\colon N \to N'$ induce el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ-"'] & \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)) \arrow[d, "f_*\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N') \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N'))
\end{tikzcd}$$

Un comentario importante: los $\underline{\mathrm{Hom}}_R$ son R-módulos, pero los Hom_R denotan conjuntos. Entonces la observación es que hay una biyección entre ciertos conjuntos. A priori esto no quiere decir nada: tener una biyección $X \cong Y$ es la misma cosa que decir que X y Y tienen la misma cardinalidad. La parte clave es que la biyección de arriba es natural en un sentido preciso.

Demostración. Esta biyección es casi obvia: se ve que *por la definición de producto tensorial*, hay una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \{\text{aplicaciones } R\text{-bilineales } L \times M \to N\},$$

donde una aplicación $f\colon L \times M \to N$ es R-**bilineal** si satisface las identidades habituales

$$r \cdot f(\ell, m) = f(r \cdot \ell, m) = f(\ell, r \cdot m),\; f(\ell + \ell', m) = f(\ell, m) + f(\ell', m),\; f(\ell, m + m') = f(\ell, m) + f(\ell, m').$$

Luego, vemos que un morfismo R-bilineal $L \times M \to N$ es la misma cosa que un morfismo R-lineal $L \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$. Específicamente, si tenemos un morfismo R-lineal $\phi\colon L \otimes_R M \to N$, podemos definir un morfismo

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}\colon L &\to \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N), \\
\ell &\mapsto (m \mapsto \phi(\ell \otimes m)).
\end{aligned}$$

A partir de un morfismo R-lineal $\psi\colon L \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$, podemos definir

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}\colon L \otimes_R M &\to N, \\
\ell \otimes m &\mapsto \psi(\ell)(m).
\end{aligned}$$

El hecho que estas aplicaciones estén bien definidas y sean R-lineales es consecuencia de las relaciones que definen a $L \otimes_R M$. Se ve que $\widetilde{\widehat{\phi}} = \phi$ y $\widehat{\widetilde{\psi}} = \psi$. La naturalidad la dejo como un ejercicio (fácil). ■

0.19. Observación. *Para R-módulos L, M, N hay isomorfismos naturales*

$$
\begin{aligned}
(L \otimes_R M) \otimes_R N &\cong L \otimes_R (M \otimes_R N),\\
(\ell \otimes m) \otimes n &\mapsto \ell \otimes (m \otimes n);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \otimes_R N &\cong N \otimes_R M,\\
m \otimes n &\mapsto n \otimes m;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \otimes_R R &\cong M,\\
m \otimes r &\mapsto r \cdot m.
\end{aligned}
$$

1. Definición de categorías

Los módulos sobre un anillo fijo R forman una **categoría**. En estos apuntes no vamos a abusar del lenguaje categórico, pero vamos a dar las definiciones básicas e indispensables para cualquier curso de álgebra o geometría.

1.1. Definición. Una **categoría $\mathbf{C}$** está definida por

- una clase de **objetos** $X, Y, Z, \ldots$;
- conjuntos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ de **morfismos** $X \xrightarrow{f} Y$ para cada par de objetos fijos X y Y;
- una ley de composición de morfismos

$$
\begin{aligned}
\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z),\\
(X \xrightarrow{f} Y,\ Y \xrightarrow{g} Z) &\mapsto (X \xrightarrow{g \circ f} Z).
\end{aligned}
$$

Estos datos tienen que satisfacer los siguientes axiomas:

- para cada objeto X tenemos el morfismo identidad $\operatorname{id}_X\colon X \to X$ que es la identidad respecto a $\circ$:

$$
\begin{aligned}
(X \xrightarrow{f} Y) \circ (X \xrightarrow{\operatorname{id}_X} X) &= (X \xrightarrow{f} Y),\\
(Y \xrightarrow{\operatorname{id}_Y} Y) \circ (X \xrightarrow{f} Y) &= (X \xrightarrow{f} Y);
\end{aligned}
$$

- la composición es asociativa:

$$
(Z \xrightarrow{h} W) \circ (Y \xrightarrow{g} Z \ \circ\ X \xrightarrow{f} Y) = (Z \xrightarrow{h} W \ \circ\ Y \xrightarrow{g} Z) \circ (X \xrightarrow{f} Y).
$$

Hemos dicho que tenemos una *clase* de objetos porque normalmente los objetos no forman un conjunto sino un “conjunto grande”. El ejemplo más básico es la categoría donde los objetos son conjuntos y los morfismos $X \to Y$ son aplicaciones entre conjuntos. Como probablemente saben, todos los conjuntos no forman un conjunto. De hecho, si tal conjunto $\mathfrak{U}$ existiera, entonces existiría el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos $P := \{X \in \mathfrak{U} \mid X \notin X\}$, pero si $P \in P$, entonces $P \notin P$ y si

$P \notin P$, entonces $P \in P$; esto se llama **la paradoja de Russell** o **la paradoja del barbero** (si cada persona es afeitada por el barbero si y sólo si no se afeita a sí misma, ¿se afeita el barbero a sí mismo?). Por esto en una categoría se trata de una *clase* de objetos. Cuando los objetos forman un conjunto, se dice que $\mathbf{C}$ es una categoría **pequeña**. La mayoría de las categoría interesantes que aparecen en la naturaleza no son pequeñas.

1.2. Definición. Se dice que una categoría $\mathbf{C}$ es una **subcategoría** de $\mathbf{D}$ si los objetos de $\mathbf{C}$ forman una subclase de los objetos de $\mathbf{D}$, los morfismos en $\mathbf{C}$ son también morfismos en $\mathbf{D}$ (es decir, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(X,Y)$ para cada $X,Y \in \mathbf{C}$), y la composición de morfismos en $\mathbf{C}$ es la misma que en $\mathbf{D}$.

Si además $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(X,Y)$ para cada $X,Y \in \mathbf{C}$, entonces se dice que $\mathbf{C}$ es una **subcategoría plena** de $\mathbf{D}$.

1.3. Ejemplo. He aquí algunos ejemplos básicos de categorías que todos ya conocen:

categoría	objetos	morfismos
Set	conjuntos	aplicaciones entre conjuntos
Top	espacios topológicos	aplicaciones contínuas
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Ring	anillos	homomorfismos de anillos
R-**Mód**	R-módulos	aplicaciones R-lineales
$\mathbb{K}$-**Vect** $= \mathbb{K}$-**Mód**	espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$	aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales
Ab $= \mathbb{Z}$-**Mód**	grupos abelianos	homomorfismos de grupos
...	...	...

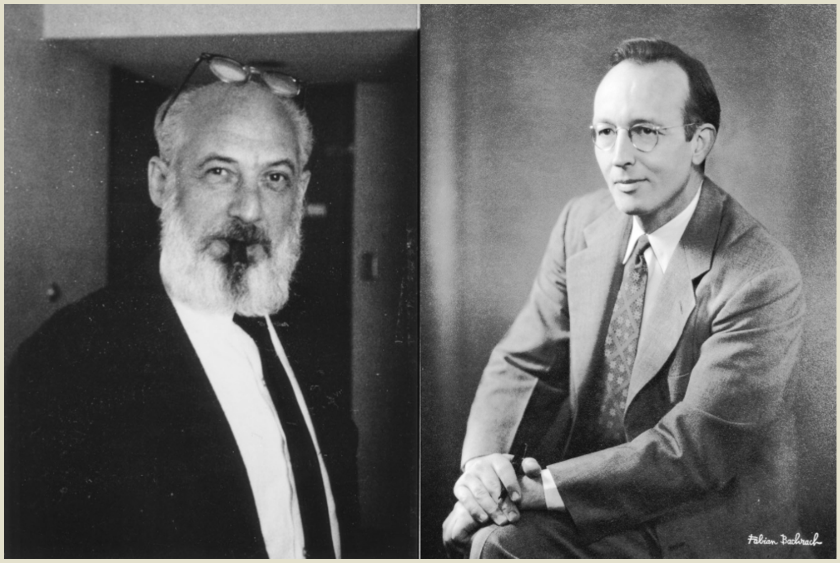
Todas las categorías de arriba son subcategorías de **Set** (porque sus objetos son conjuntos con cierta estructura especial y los morfismos son aplicaciones que preservan las estructuras); **Ab** es una subcategoría plena de **Grp**, la categoría de anillos conmutativos es una subcategoría plena de la categoría de anillos, etc. Nos va a interesar principalmente la categoría R-**Mód**; entonces en lugar de $\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}}(M,N)$ voy a escribir simplemente $\operatorname{Hom}_R(M,N)$. ▲

La teoría de categorías fue inventada por los matemáticos estadounidenses Samuel Eilenberg (1913–1998) y Saunders Mac Lane (1909–2005).

Eilenberg nació en Polonia donde en 1934 recibió su doctorado bajo la dirección de Kazimierz Kuratowski y Karol Borsuk. Sus intereses siempre estuvieron relacionados con topología y topología algebraica. En 1939 se mudó a los Estados Unidos.

Mac Lane nació en los Estados Unidos, pero recibió su doctorado en lógica en Göttingen bajo la dirección de Paul Bernays y Hermann Weyl. En 1933 tuvo que volver a los Estados Unidos por la situación en las universidades alemanes bajo los nazis (vean su articulo "Mathematics at Göttingen under the Nazis"). Gradualmente empezó a trabajar en el álgebra.

La colaboración entre Eilenberg y Mac Lane comenzó en 1940. Entre otras cosas, fundaron la teoría de categorías (en su artículo "General theory of natural equivalences" publicado en 1945). Para saber más sobre la historia de la teoría de categorías, pueden leer el libro "From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory" (Springer, 2009) escrito por Jean-Pierre Marquis. (Sus ideas filosóficas son cuestionables, pero de todas maneras, el autor recogió mucha información.)



Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane

Casi todas las estructuras en álgebra y geometría forman categorías. Es bueno saber cuándo ciertas propiedades son consecuencias formales de la teoría de categorías.

En la comedia "El burgués gentilhombre" (1670) del dramaturgo francés Molière se trata de un burgués cuarentañero, Monsieur Jourdain, cuyo sueño es de adquirir los modales de aristócratas.

En una de las escenas Monsieur Jourdain habla con un filósofo que le explica la diferencia entre verso y prosa:

> JOURDAIN: Os lo ruego. Y ahora es preciso que os haga una confidencia. Estoy enamorado de una dama de la mayor distinción, y desearía que me ayudárais a redactar una misiva que quiero depositar a sus plantas.
> FILÓSOFO: No hay inconveniente.
> JOURDAIN: Será una galantería, ¿verdad?
> FILÓSOFO: Sin duda alguna. ¿Y son versos los que queréis escribirle?
> JOURDAIN: No, no; nada de versos.
> FILÓSOFO: ¿Preferís la prosa?
> JOURDAIN: No. No quiero ni verso ni prosa.
> FILÓSOFO: ¡Pues una cosa u otra ha de ser!
> JOURDAIN: ¿Por qué?
> FILÓSOFO: Por la sencilla razón, señor mío, de que no hay más que dos maneras de expresarse: en prosa o en verso.
> JOURDAIN: ¿Conque no hay más que prosa o verso?
> FILÓSOFO: Nada más. Y todo lo que no está en prosa está en verso; y todo lo que no está en verso, está en prosa.
> JOURDAIN: Y cuando uno habla, ¿en qué habla?
> FILÓSOFO: En prosa.
> JOURDAIN: ¡Cómo! Cuando yo le digo a [mi nana] Nicolasa: "Tráeme las zapatillas" o "dame el gorro de dormir", ¿hablo en prosa?
> FILÓSOFO: Sí, señor.
> JOURDAIN: ¡Por vida de Dios! ¡Más de cuarenta años que hablo en prosa sin saberlo! No sé cómo pagaros esta lección...

La misma cosa pasa con la teoría de categorías: muchos hablan en la teoría de categorías sin saberlo.

2. Isomorfismos, monomorfismos y epimorfismos

2.1. Definición. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo en cualquier categoría.

- f es un **isomorfismo** si existe otro morfismo $f^{-1}\colon Y \to X$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. (Ejercicio: si existe, este f^{-1} es únicamente definido por f.) En este caso escribimos $X \cong Y$.

- f es un **monomorfismo** si para cada par de morfismos $Z \xrightarrow{g,g'} X$ tenemos
$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'.$$

- f es un **epimorfismo** si para cada par de morfismos $Y \xrightarrow{g,g'} Z$ tenemos
$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'.$$

Un monomorfismo se denota por $\rightarrowtail$ y un epimorfismo se denota por $\twoheadrightarrow$.

2.2. Observación.

- *Si $m\colon X \rightarrowtail Y$ y $m'\colon Y \rightarrowtail Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m\colon X \to Z$ es también un monomorfismo.*

- *Si $e\colon X \twoheadrightarrow Y$ y $e'\colon Y \twoheadrightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e\colon X \to Z$ es también un epimorfismo.*

- *Si $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es también un monomorfismo.*

- *Si $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es también un epimorfismo.*

Demostración. Claro a partir de las definiciones. ■

En una categoría general los objetos no son conjuntos y entonces no tiene sentido la noción de subconjuntos. Pero existe una generalización natural:

2.3. Definición. Digamos que $X \preceq Y$ si existe un monomorfismo $X \rightarrowtail Y$. Para un objeto fijo Y sus **subobjetos** son todos los objetos $X \preceq Y$ módulo la relación de equivalencia

$$X_1 \sim X_2 \iff X_1 \preceq X_2 \text{ y } X_2 \preceq X_1.$$

Por ejemplo, en la categoría **Set** un subobjeto X de Y es simplemente un subconjunto $X \subseteq Y$ (más precisamente, la clase de todas las inyecciones $i\colon Z \hookrightarrow Y$ tales que $\operatorname{im} i = X$).

2.4. Ejercicio. *1) La definición implica que cada isomorfismo es automáticamente mono y epi.*

Sin embargo, mono y epi no siempre implica iso. Demuestre que en la categoría de anillos la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es mono y epi (porque cada morfismo $f\colon \mathbb{Q} \to R$ está definido por su valor $f(1)$), pero los anillos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son isomorfos.

2) $f\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo de R-módulos precisamente si f es inyectivo (como aplicación entre conjuntos).

3) $f\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo de R-módulos precisamente si f es sobreyectivo.

Note que en la categoría de anillos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo, pero no es una aplicación sobreyectiva entre conjuntos.

4) $f\colon M \xrightarrow{\cong} N$ es un isomorfismo de R-módulos si es una biyección. Entonces, para R-módulos mono y epi implica iso.

En general es falso: por ejemplo, en la categoría de espacios topológicos **Top**, *si una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es una biyección, no es necesariamente un isomorfismo (porque los isomorfismos en* **Top** *son homeomorfismos, es decir aplicaciones cuya aplicación inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ también es continua).*

2.5. Ejemplo. Si $M \subset N$ es un R-submódulo, entonces la inclusión $M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo. La proyección $N \twoheadrightarrow N/M$ es un epimorfismo. ▲

Sin embargo, la definición correcta es 2.1, y no se debe pensar en iso-, mono-, epi-morfismos como biyecciones, inyecciones y sobreyecciones (para R-módulos es algo inocuo, pero en el álgebra homológica hay otros contextos, en particular la *cohomología de haces*, donde los objetos de interés no son conjuntos).

3. Productos y coproductos

3.1. Definición. Para dos objetos $X, Y \in \mathbf{C}$ su **producto** es un objeto $X \times Y \in \mathbf{C}$ dotado de dos morfismos $p_X\colon X \times Y \to X$ y $p_Y\colon X \times Y \to Y$ que satisfacen la siguiente propiedad universal: si tenemos otro objeto $Z \in \mathbf{C}$ junto con morfismos $f\colon Z \to X$ y $g\colon Z \to Y$, entonces existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : Z \to X \times Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

De modo similar, un **coproducto** es un objeto $X \sqcup Y \in \mathbf{C}$ dotado de dos morfismos $i_X \colon X \to X \sqcup Y$ y $i_Y \colon Y \to X \sqcup Y$ que satisfacen la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\exists!"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

3.2. Observación. *Si $X \times Y$ (resp. $X \sqcup Y$) esiste, es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Por ejemplo, para $X \times Y$, supongamos que existen dos productos

$$X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y \quad \text{y} \quad X \xleftarrow{p'_X} X \times' Y \xrightarrow{p'_Y} Y.$$

Entonces tenemos morfismos únicos $X \times' Y \to X \times Y$ y $X \times Y \to X \times' Y$ que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& X \times' Y \arrow[dl, "p'_X"'] \arrow[d, dashed, "\langle p'_X, p'_Y \rangle"] \arrow[dr, "p'_Y"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[d, dashed, "\langle p_X, p_Y \rangle"] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
X & X \times' Y \arrow[l, "p'_X"'] \arrow[r, "p'_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Pero las composiciones $\langle p'_X, p'_Y \rangle \circ \langle p_X, p_Y \rangle$ y $\langle p_X, p_Y \rangle \circ \langle p'_X, p'_Y \rangle$ deben ser $\mathrm{id}_{X \times Y}$ y $\mathrm{id}_{X \times' Y}$ respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[ddl, bend right, "p_X"'] \arrow[ddr, bend left, "p_Y"] \arrow[d, "\langle p_X, p_Y \rangle"] \arrow[dd, dashed, bend right=40, "\exists!"', "=\mathrm{id}"] & \\
& X \times' Y \arrow[dl, "p'_X"'] \arrow[d, "\langle p'_X, p'_Y \rangle"] \arrow[dr, "p'_Y"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \times' Y \arrow[ddl, bend right, "p'_X"'] \arrow[ddr, bend left, "p'_Y"] \arrow[d, "\langle p'_X, p'_Y \rangle"] \arrow[dd, dashed, bend right=40, "\exists!"', "=\mathrm{id}"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[d, "\langle p_X, p_Y \rangle"] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
X & X \times' Y \arrow[l, "p'_X"'] \arrow[r, "p'_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

■

3.3. Ejercicio.

- *Los productos y coproductos son conmutativos (cuando existen):*

$$X \times Y \cong Y \times X \quad y \quad X \sqcup Y \cong Y \sqcup X.$$

- *Los productos y coproductos son asociativos (cuando existen):*

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z) \quad y \quad (X \sqcup Y) \sqcup Z \cong X \sqcup (Y \sqcup Z).$$

3.4. Ejemplo. En la categoría de conjuntos **Set** el producto de dos conjuntos $X \times Y$ es (salvo isomorfismo) el **producto cartesiano** $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ y el coproducto es la **unión disjunta** $X \sqcup Y$. ▲

De modo similar, se pueden definir productos y coproductos infinitos:

3.5. Definición. Sea $\{X_k\}_{k\in I}$ una familia de objetos indexada por un conjunto I. Entonces

- un **producto** $\prod_k X_k$ es un objeto junto con morfismos $p_k\colon \prod_k X_k \to X_k$ tal que para cualquier otro objeto Z junto con morfismos $\{f_k\colon Z \to X_k\}_{k\in I}$ existe un único morfismo $f\colon Z \to \prod_k X_k$ que satisface $p_k \circ f = f_k$ para cada $k \in I$.
- un **coproducto** $\coprod_k X_k$ es un objeto junto con morfismos $i_k\colon X_k \to \coprod_k X_k$ tal que para cualquier otro objeto Z junto con morfismos $\{f_k\colon X_k \to Z\}_{k\in I}$ existe un único morfismo $f\colon \coprod_k X_k \to Z$ que satisface $f \circ i_k = f_k$ para cada $k \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f"] \arrow[dr, "f_k"] & \\
\prod_k X_k \arrow[r, "p_k"] & X_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & \coprod_k X_k \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$