Álgebra homológica, día 12

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

23 de agosto de 2016

1. Funtores derivados Ext

Para cualquier categoría abeliana $\mathbf{A}$ tenemos nuestros funtores preferidos exactos por la izquierda, contravariante y covariante:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab},$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}.$$

Entonces, para estas categorías existen funtores derivados por la derecha, cuando en las respectivas categorías $\mathbf{A}^\circ$ y $\mathbf{A}$ haya suficientes objetos inyectivos. Notemos que los objetos inyectivos en $\mathbf{A}^\circ$ corresponden a los objetos proyectivos en $\mathbf{A}$.

1.1. Definición. Para dos objetos $M, N \in \mathbf{A}$ sus funtores Ext son

$$\begin{aligned} {}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N) &:= R^n \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N), \quad \text{si hay suficientes proyectivos en } \mathbf{A} \\ {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,-) &:= R^n \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-), \quad \text{si hay suficientes inyectivos en } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

La notación "Ext" viene de la palabra "extensión".

A priori, ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$ son dos cosas diferentes: para calcular el primero, tenemos que escoger una resolución proyectiva $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ y calcular la cohomología del complejo $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P^\bullet, N)$, mientras que para calcular el segundo, tenemos que escoger una resolución inyectiva $N \rightarrowtail I^\bullet$ y calcular la cohomología del complejo $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I^\bullet)$. Afortunadamente (si hay suficientes objetos proyectivos e inyectivos y ambos Ext existen) para cada n tenemos isomorfismos naturales

$${}_I\operatorname{Ext}^n_R(M,N) \cong {}_{II}\operatorname{Ext}^n_R(M,N).$$

Vamos a demostrarlo en un momento.

1.2. Observación.

$$\begin{aligned} {}_I\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(M,N) &\cong {}_{II}\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(M,N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N), \\ {}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) &= {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = 0 \textit{ para } n > 0 \textit{, si } P \textit{ es proyectivo}, \\ {}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,I) &= {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,I) = 0 \textit{ para } n > 0 \textit{, si } I \textit{ es inyectivo}. \end{aligned}$$

Demostración. Tenemos la primera fórmula porque los $\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,-)$ son los funtores derivados de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,-)$.

Las fórmulas ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = 0$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,I) = 0$ para $n > 0$ son consecuencias de la propiedad general "$R^n F(I) = 0$".

Luego, ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,I) := R^n \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,I) = 0$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,-) := R^n \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P,-) = 0$ para $n > 0$ porque estamos tomando los funtores derivados de los funtores exactos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,I)$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P,-)$ (*por la definición* de objetos inyectivos y proyectivos). ■

${}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N)$ es un δ-funtor contravariante y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,-)$ es un δ-funtor covariante: las sucesiones exactas cortas

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

inducen de modo natural sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M'',L) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,L) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M',L) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]$(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& {}_{I}\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M'',L) \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M,L) \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M',L) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]$(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& {}_{I}\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}}(M'',L) \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}}(M,L) \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}}(M',L) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L,N') \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L,N) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L,N'') \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]$(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& {}_{II}\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(L,N') \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(L,N) \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(L,N'') \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]$(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& {}_{II}\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}}(L,N') \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}}(L,N) \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}}(L,N'') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1.3. Observación.

1) ${}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,-)$ *es también un funtor covariante en el segundo argumento.*

2) ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,-)$ *es también un funtor contravariante en el primer argumento.*

A saber, morfismos $N \to N'$ y $M \to M'$ inducen transformaciones naturales entre funtores

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N') \quad y \quad \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M',-) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-).$$

Y luego transformaciones naturales

$${}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N) \Rightarrow {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N') \quad y \quad {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M',-) \Rightarrow {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,-)$$

que conmutan con los morfismos δ. Por ejemplo, en el caso de ${}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,-)$, cada diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1' \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2' \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M_2'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny, font=\small]
\cdots \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1'',N) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1,N) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1',N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M_1'',N) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots & \\
& \cdots \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1'',N') \arrow[rr] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1,N') \arrow[rr] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1',N') \arrow[rr, "\delta"] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M_1'',N') \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2'',N) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[uu] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2,N) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[uu] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2',N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] \arrow[uu] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M_2'',N) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[uu] & & \cdots & \\
& \cdots \arrow[r] & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2'',N') \arrow[rr] \arrow[uu] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2,N') \arrow[rr] \arrow[uu] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2',N') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[uu] & & {}_{I}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M_2'',N') \arrow[r] \arrow[uu] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por la definición de los funtores derivados como δ-funtores universales. ■

1.4. Teorema (Balanceo de los Ext**).** *Supongamos que en* $\mathbf{A}$ *hay suficientes objetos proyectivos e inyectivos. Entonces tenemos isomorfismos naturales*

$$_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N) \cong {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N).$$

Demostración. Por la definición, $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,-)$ es un δ-funtor en el segundo argumento. Ahora vamos a demostrar que $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N)$ es también un δ-funtor en el primer argumento. Sea

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

una sucesión exacta. Escojamos una resolución inyectiva $N \rightarrowtail I^\bullet$. Tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M'',I^\bullet) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,I^\bullet) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M',I^\bullet) \to 0$$

—de hecho, en cada grado n el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,I^n)$ es exacto por la definición de objetos inyectivos. Esta sucesión induce una sucesión exacta de cohomología

$$\cdots \to {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M'',N) \to {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N) \to {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M',N) \xrightarrow{\delta} {}_{II}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M'',N) \to \cdots$$

Además, δ es natural, porque un morfismo entre sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1' \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2' \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M_2'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo entre sucesiones exactas de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M_1'',I^\bullet) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M_1,I^\bullet) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M_1',I^\bullet) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M_2'',I^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M_2,I^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M_2',I^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

y puesto que la construcción del morfismo de conexión en la sucesión exacta larga de cohomología es natural, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1'',N) \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1,N) \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_1',N) \arrow[r, "\delta"] & {}_{II}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M_1'',N) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2'',N) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2,N) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M_2',N) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u] & {}_{II}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(M_2'',N) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Esto quiere decir que $_{II}\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathbf{A}}(-,N)$ es un δ-funtor (contravariante) en el primer argumento. Tenemos también isomorfismos

$$_{I}\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(-,N) \cong {}_{II}\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(-,N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N),$$

y como hemos notado arriba, $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = 0$ para todo P proyectivo y $n > 0$. Por tanto $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N)$ es un δ-funtor borrable* (porque por nuestra hipótesis hay suficientes proyectivos) y por el teorema general de Grothendieck, los $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N)$ son los funtores derivados de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N)$ y en consecuencia son isomorfos a los $_{I}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N)$. ■

*Recordemos que $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}$ es un funtor contravariante en el primer argumento. Entonces para ser borrable sería suficiente (bajo nuestra hipótesis que hay suficientes proyectivos e inyectivos) que $_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = 0$ para $n > 0$ y todo P inyectivo *en la categoría* $\mathbf{A}^\circ$, es decir para todo P proyectivo en $\mathbf{A}$.

La ventaja de tener dos definiciones diferentes ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$ es que a veces los cálculos se vuelven más fáciles con resoluciones proyectivas (definición I), y a veces son más fáciles con resoluciones inyectivas (definición II). También es importante tener dos versiones diferentes, porque la categoría $\mathbf{A}$ puede tener suficientes proyectivos y no tener suficientes inyectivos (y en este caso se puede construir solamente ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$), o al contrario, tener suficientes inyectivos y no tener suficientes proyectivos (entonces hay solamente ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$).

Para los cálculos será útil recordar que todo funtor derivado es aditivo, lo cual quiere decir precisamente que

$$R^nF(M'\oplus M'')\cong R^nF(M')\oplus R^nF(M'') \quad \text{y} \quad L_nF(M'\oplus M'')\cong L_nF(M')\oplus L_nF(M'').$$

En particular, en nuestro caso

$$\begin{gathered}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M'\oplus M'',N)\cong \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M',N)\oplus \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M'',N),\\ \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N'\oplus N'')\cong \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N')\oplus \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N'').\end{gathered}$$

Notemos que en la categoría de R-módulos hay suficientes objetos proyectivos e inyectivos, y además tenemos funtores

$$\begin{gathered}\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ\to R\text{-}\mathbf{Mód},\\ \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}\to R\text{-}\mathbf{Mód}.\end{gathered}$$

Entonces sus funtores derivados

$$\begin{gathered}\operatorname{Ext}^n_R(-,N):=R^n\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N),\\ \operatorname{Ext}^n_R(M,-):=R^n\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-).\end{gathered}$$

no son simplemente grupos abelianos sino R-módulos. Pero todo esto no cambia nuestros resultados de arriba: el funtor olvidadizo

$$Olv\colon R\text{-}\mathbf{Mód}\to \mathbf{Ab}$$

es exacto, y por lo tanto

$$\begin{gathered}Olv\circ\operatorname{Ext}^n_R(-,N)\cong R^n(Olv\circ\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N))=R^n\operatorname{Hom}_R(-,N),\\ Olv\circ\operatorname{Ext}^n_R(M,-)\cong R^n(Olv\circ\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-))=R^n\operatorname{Hom}_R(M,-).\end{gathered}$$

Entonces todos nuestros resultados sobre las propiedades de $\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,-)$ se mantienen para $\mathbf{A}=R\text{-}\mathbf{Mód}$ y los funtores derivados de $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,-)$, solo que se olvida la acción de R sobre Ext^n_R.

2. Funtores derivados Tor

Para R-módulos fijos M y N tenemos funtores del producto tensorial, aditivos y exactos por la derecha, pero no necesariamente exactos por la izquierda:

$$M\otimes_R -,\ -\otimes_R N\colon R\text{-}\mathbf{Mód}\to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

Entonces podemos considerar los funtores derivados por la izquierda correspondientes:

2.1. Definición.

$$
{}_I \operatorname{Tor}_n^R(-, N) := L_n(- \otimes_R N),
$$
$$
{}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, -) := L_n(M \otimes_R -).
$$

Por las propiedades generales de funtores derivados, tenemos

2.2. Observación.

$$
\begin{aligned}
{}_I \operatorname{Tor}_0^R(M, N) &\cong {}_{II} \operatorname{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N, \\
{}_I \operatorname{Tor}_n^R(P, N) &= {}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(P, N) = 0 \textit{ para } n > 0, \textit{ si } P \textit{ es proyectivo}, \\
{}_I \operatorname{Tor}_n^R(M, P) &= {}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, P) = 0 \textit{ para } n > 0, \textit{ si } P \textit{ es proyectivo}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Tenemos la primera fórmula por la definición de funtores derivados. Las formulas ${}_I \operatorname{Tor}_n^R(P, N) = 0$ y ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, P) = 0$ son consecuencias de la propiedad general "$L_n F(P) = 0$". En particular, esto significa que para P proyectivo ambos funtores $P \otimes_R -$ y $- \otimes_R P$ son exactos.

Las formulas ${}_I \operatorname{Tor}_n^R(P, N) = 0$ y ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, P) = 0$ para $n > 0$ se cumplen porque estamos tomando los funtores derivados de un funtor exacto. ■

Por definición, un R-módulo M se llama **plano** si $- \otimes_R M$ es un funtor exacto. Esto es equivalente a $\operatorname{Tor}_n^R(-, M) = 0$ para $n \ge 1$, o simplemente para $n = 1$. Se sigue que todo módulo proyectivo es automáticamente plano. En general, "plano" no implica "proyectivo": el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ es plano (porque es una localización de $\mathbb{Z}$), pero no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo. Los anillos sobre los cuales cada R-módulo plano es automáticamente proyectivo se llaman **anillos perfectos**. Por ejemplo, todo anillo artiniano es perfecto.

Por definición, ${}_I \operatorname{Tor}_n^R(-, N)$ es un δ-funtor izquierdo en el primer argumento y ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, -)$ es un δ-funtor izquierdo en el segundo argumento: sucesiones exactas cortas de R-módulos

$$
0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to N' \to N \to N'' \to 0
$$

inducen de modo natural sucesiones exactas largas

$$
\begin{array}{l}
\cdots \to {}_I \operatorname{Tor}_2^R(M'', L) \to {}_I \operatorname{Tor}_2^R(M, L) \to {}_I \operatorname{Tor}_2^R(M', L) \to \\
\to {}_I \operatorname{Tor}_1^R(M'', L) \to {}_I \operatorname{Tor}_1^R(M, L) \to {}_I \operatorname{Tor}_1^R(M', L) \to \\
\to M' \otimes_R L \to M \otimes_R L \to M'' \otimes_R L \to 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\cdots \to {}_{II} \operatorname{Tor}_2^R(L, N') \to {}_{II} \operatorname{Tor}_2^R(L, N) \to {}_{II} \operatorname{Tor}_2^R(L, N'') \to \\
\to {}_{II} \operatorname{Tor}_1^R(L, N') \to {}_{II} \operatorname{Tor}_1^R(L, N) \to {}_{II} \operatorname{Tor}_1^R(L, N'') \to \\
\to L \otimes_R N' \to L \otimes_R N \to L \otimes_R N'' \to 0
\end{array}
$$

2.3. Observación (Balanceo de los Tor). *Existen isomorfismos naturales*

$$
{}_I \operatorname{Tor}_n^R(M, N) \cong {}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, N).
$$

Demostración. Por definición, ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(M, N)$ es un δ-funtor universal en el segundo argumento. Ya hemos notado que ${}_{II} \operatorname{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N \cong {}_I \operatorname{Tor}_0^R(M, N)$ (y de hecho, este isomorfismo es natural en M) y que ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(P, N) = 0$ para $n > 0$ y P proyectivo. Entonces ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(-, N)$ es borrable en el primer argumento, y gracias al teorema de Grothendieck será suficiente demostrar que ${}_{II} \operatorname{Tor}_n^R(-, N)$ es un δ-funtor. Para N fijo, escojamos una resolución proyectiva

$$
(P^\bullet \twoheadrightarrow N) = (\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to N \to 0)
$$

Luego, una sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

nos da una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to M' \otimes_R P^\bullet \to M \otimes_R P^\bullet \to M'' \otimes_R P^\bullet \to 0$$

ya que en cada grado el funtor $- \otimes_R P^n$ es exacto. La última sucesión de complejos induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \to {}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(M', N) \to {}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(M, N) \to {}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(M'', N) \xrightarrow{\delta} {}_{II}\operatorname{Tor}_{n-1}^R(M', N) \to \cdots$$

La naturalidad de δ significa que los ${}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(-, N)$ forman un δ-funtor izquierdo. ∎

A partir de ahora, vamos a escribir simplemente $\operatorname{Tor}_n^R(M, N)$ en vez de ${}_{I}\operatorname{Tor}_n^R(M, N)$ y ${}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(M, N)$. Para muchos cálculos es útil recordar que los funtores Tor son aditivos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_n^R(M' \oplus M'', N) &\cong \operatorname{Tor}_n^R(M', N) \oplus \operatorname{Tor}_n^R(M'', N), \\ \operatorname{Tor}_n^R(M, N' \oplus N'') &\cong \operatorname{Tor}_n^R(M, N') \oplus \operatorname{Tor}_n^R(M, N''). \end{aligned}$$

2.4. Observación (Simetría de Tor). *Para R un anillo conmutativo tenemos isomorfismos naturales*

$$\operatorname{Tor}^n_R(M, N) \cong \operatorname{Tor}^n_R(N, M).$$

Demostración. Para M fijo, tenemos un isomorfismo de funtores

$$(M \otimes_R -) \cong (- \otimes_R M) \colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

Luego,

$$\operatorname{Tor}^n_R(M, N) \cong L_n(M \otimes_R -)(N) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tor}^n_R(N, M) \cong L_n(- \otimes_R M)(N)$$

son isomorfos, al ser los funtores derivados de funtores isomorfos. ∎

3. Ext y Tor de grupos abelianos

Si A es un grupo abeliano, entonces A tiene una resolución por grupos abelianos libres

$$0 \to H \to F \to A \to 0$$

donde F es algún grupo libre que corresponde a un conjunto de generadores de A y $H \subset F$ es un subgrupo de relaciones. Pero cada subgrupo de un grupo abeliano libre es también libre; es una propiedad muy especial del anillo $\mathbb{Z}$ que simplifica la vida. En general, tenemos la siguiente noción:

3.1. Definición. La **dimensión proyectiva** $dp(M)$ de un R-módulo M es el mínimo entero n tal que existe una resolución proyectiva

$$0 \to P^{-n} \to P^{-n+1} \to \cdots \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$$

La **dimensión homológica** de R es el supremo de $dp(M)$ para todo R-módulo M (si existe).

En particular, la dimensión homológica de $\mathbb{Z}$ es igual a 1. Esto implica la siguiente

3.2. Observación. *Si A y B son grupos abelianos, entonces*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) &= 0 \textit{ para } n > 1,\\
\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(A,B) &= 0 \textit{ para } n > 1.
\end{aligned}
$$

Demostración. Está claro de la construcción de funtores derivados a partir de resoluciones proyectivas. También podemos escoger una sucesión exacta

$$0 \to H \to F \to A \to 0$$

donde F y H son libres. Esta sucesión induce una sucesión exacta larga con los Ext

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F,B) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,B) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,B) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(F,B) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H,B) \to \cdots$$

y otra sucesión exacta larga con los Tor:

$$\cdots \to \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(H,B) \to \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(F,B) \to \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(A,B) \to H \otimes_{\mathbb{Z}} B \to F \otimes_{\mathbb{Z}} B \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to 0$$

Pero H y F son libres, en particular proyectivos, y por lo tanto

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(H,B) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(F,B) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(H,B) = \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(F,B) = 0 \quad \text{para todo } n > 0.$$

La exactitud implica que

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(A,B) = 0 \quad \text{para todo } n > 0.$$

■

3.3. Ejemplo. El argumento del arriba nos da una demostración divertida de la simetría de los Tor de grupos abelianos: para un grupo abeliano A podemos escoger una sucesión exacta

$$0 \to H \to F \to A \to 0$$

con H y F libres. Aplicando los funtores $- \otimes_{\mathbb{Z}} B$ y $B \otimes_{\mathbb{Z}} -$ obtenemos dos sucesiones exactas

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(A,B) \arrow[r] & H \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r] & F \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r] & A \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(B,A) \arrow[r] & B \otimes_{\mathbb{Z}} H \arrow[r] & B \otimes_{\mathbb{Z}} F \arrow[r] & B \otimes_{\mathbb{Z}} A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

que forman parte de un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(A,B) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & F \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(B,A) \arrow[r] & B \otimes_{\mathbb{Z}} H \arrow[r] & B \otimes_{\mathbb{Z}} F \arrow[r] & B \otimes_{\mathbb{Z}} A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

—aquí las tres flechas verticales entre los productos tensoriales son los isomorfismos naturales, y la flecha punteada entre $\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(A,B)$ y $\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(B,A)$ es el morfismo canónico inducido entre los núcleos. Por el lema del cinco concluimos que esta flecha es también un isomorfismo. ▲

3.4. Ejemplo. Vamos a calcular Ext y Tor entre grupos abelianos finitamente generados. Tales grupos tienen su parte libre isomorfa a $\mathbb{Z}^{\oplus r}$ y su parte de torsión isomorfa a la suma de ciertos grupos cíclicos finitos:

$$A \cong \mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}}_{\mathrm{Tors}(A)}.$$

Ya que los funtores Ext y Tor son aditivos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A' \oplus A'', B) &\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A', B) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A'', B), \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B' \oplus B'') &\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B') \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B''), \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A' \oplus A'', B) &\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A', B) \oplus \mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(A'', B), \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B' \oplus B'') &\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B') \oplus \mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(A, B''). \end{aligned}$$

Entonces va a ser suficiente analizar los casos $A = \mathbb{Z}$ y $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Primero, $\mathbb{Z}$ es proyectivo, entonces

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Z}) = 0.$$

Para calcular $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$, podemos considerar la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

La aplicación del funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \xrightarrow{\times n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, B) \to \cdots$$

pero aquí $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, B) = 0$, y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \cong B$, y el morfismo inducido por "$\times n$" coincide con la multiplicación por n sobre B. Entonces

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \cong \mathrm{coker}(B \xrightarrow{\times n} B) \cong B/nB.$$

En el caso de Tor, la aplicación de $- \otimes B$ a la misma sucesión exacta corta nos da una sucesión exacta

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \to 0$$

Pero $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = 0$ y $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \cong B$, y el morfismo inducido por "$\times n$" coincide con la multiplicación por n sobre B. Entonces

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \cong \ker(B \xrightarrow{\times n} B) \cong \{x \in B \mid n \cdot x = 0\} =: {}_nB.$$

En particular,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}, \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

▲

3.5. Ejemplo. Examinemos el grupo $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$. Como grupo abeliano, $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado (y no es una suma directa de grupos no triviales $A \oplus B$), así que nuestros cálculos de arriba no sirven. El grupo $\mathbb{Q}$ es inyectivo y el grupo $\mathbb{Z}$ es proyectivo. Pero $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(-,-)$ es nulo para $n > 0$ cuando *el primer* argumento es proyectivo o *el segundo* es inyectivo. Aquí $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ están en las posiciones "equivocadas" y de hecho $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ no es trivial. Empecemos por una resolución inyectiva de $\mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

La aplicación de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},-)$ nos da una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[dll, rounded corners] & \\
& \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Los grupos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son inyectivos, de donde $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. Además, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0$. Nos queda una sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \rightarrowtail \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to 0$$

El grupo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Q}$. El grupo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es más complicado de identificar; es isomorfo al **producto restringido** de los cuerpos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \prod_p{}' \mathbb{Q}_p := \{(x_2,x_3,x_5,x_7,\ldots) \in \prod_p \mathbb{Q}_p \mid x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ excepto para un número finito de } p\}.$$

En particular, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no es numerable porque contiene los anillos $\mathbb{Z}_p$. Hay otro modo de verlo: consideremos sucesiones de números $a_1,a_2,a_3,\ldots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tales que a_1 es arbitrario, $2\,a_2 = a_1$, $3\,a_3 = a_2$, $\ldots$, $n\,a_n = a_{n-1}$, $\ldots$ Para a_{n-1} fijo, existen n diferentes posibilidades para a_n, y entonces el conjunto de tales sucesiones no es numerable. Ahora cada sucesión $a_1,a_2,a_3,\ldots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ define un homomorfismo $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $f(1/n!) := a_n$. En efecto, por la construcción de las sucesiones, $n! \cdot a_n = a_1$, de donde $n! \cdot f(1/n!) = f(1)$ y $f(1/n) = (n-1)! \cdot f(1/n!)$, así que los valores $f(1/n!) := a_n$ definen f en todo el grupo $\mathbb{Q}$. Concluimos que existe un conjunto no numerable de homomorfismos $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

El morfismo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \rightarrowtail \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ corresponde a la inclusión de las sucesiones constantes:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\rightarrowtail \prod_p{}' \mathbb{Q}_p, \\ x &\mapsto (x,x,x,\ldots). \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \cong \prod_p{}' \mathbb{Q}_p \Big/ \mathbb{Q}.$$

Este es un grupo no numerable. ▲