Álgebra homológica, día 2

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

9 de agosto de 2016

1. Funtores entre categorías

Para relacionar diferentes categorías, tenemos la noción de funtor:

1.1. Definición. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías. Un **funtor (covariante)** $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es una regla que

- para cada objeto X de $\mathbf{C}$ especifica un objeto $F(X)$ de $\mathbf{D}$,
- para cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathbf{C}$ especifica un morfismo $F(X) \xrightarrow{F(f)=:f_*} F(Y)$ en $\mathbf{D}$.

Y se piden los siguientes axiomas:

- F preserva los morfismos identidades: $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{F(X)}$ para cada X;
- F preserva la composición de morfismos: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

1.2. Ejercicio. *Si f es un isomorfismo en $\mathbf{C}$ y F es un funtor $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}$.*

1.3. Observación. *Si $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ son dos funtores, entonces $G \circ F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ (definido como aplicación de F seguida por aplicación de G) es también un funtor. Esta composición es asociativa. También para cada categoría tenemos el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (que aplica un objeto X en el mismo objeto X y un morfismo f en el mismo morfismo f). Es la identidad respecto a la composición de funtores.*

1.4. Ejemplo. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y X un objeto fijo. Para cada objeto Y podemos considerar el conjunto de morfismos $X \to Y$:

$$Y \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y).$$

Cada morfismo $f\colon Y \to Y'$ induce una aplicación f_* definida por la composición con f:

$$(Y \xrightarrow{f} Y') \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y')).$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "f\circ g"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\
Y' &
\end{tikzcd}$$

Todo esto define un funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

(el morfismo identidad $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ obviamente induce el morfismo identidad $\mathrm{id}_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ y para la composición de morfismos $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ tenemos $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$).

En la primera lección hemos visto un caso especial cuando $\mathbf{C} = R\text{-}\mathbf{Mód}$ y tenemos funtores *con valores en la categoría de R-módulos*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

La composición de este funtor con el **funtor olvidadizo** R-**Mód** $\to$ **Set** (que asocia a cada R-módulo su conjunto subyacente) es exactamente el funtor

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to \mathbf{Set}.$$

▲

1.5. Ejemplo. Como hemos observado en la primera lección, el producto tensorial $M \otimes_R N$ es funtorial en cada argumento:

$$\begin{aligned} - \otimes_R N\colon R\text{-}\mathbf{Mód} &\to R\text{-}\mathbf{Mód}, \\ M &\rightsquigarrow M \otimes_R N, \\ (M \xrightarrow{f} M') &\rightsquigarrow (M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M' \otimes_R N). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mód} &\to R\text{-}\mathbf{Mód}, \\ N &\rightsquigarrow M \otimes_R N, \\ (N \xrightarrow{g} N') &\rightsquigarrow (M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes g} M \otimes_R N'). \end{aligned}$$

▲

1.6. Ejemplo. La formación del R-módulo libre $R\langle X\rangle$ generado por los elementos de X define un funtor **Set** $\to$ R-**Mód** porque cada morfismo de conjuntos $X \to Y$ induce (de modo funtorial) el morfismo correspondiente de R-módulos $R\langle X\rangle \to R\langle Y\rangle$ (definido por la propiedad universal):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & R\langle Y\rangle \\ R\langle X\rangle \arrow[urr, dashed, "\exists!"'] & & \end{tikzcd}$$

▲

Muy a menudo es útil considerar funtores que cambian la dirección de los morfismos:

1.7. Definición. Sean **C** y **D** dos categorías. Un **funtor contravariante** $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es una regla que para cada objeto X de **C** especifica un objeto $F(X)$ de **D**, y para cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en **C** especifica un morfismo $F(Y) \xrightarrow{F(f)=:f^*} F(X)$ en **D**.

Se pide que

$$\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{F(X)}, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Para tratar los funtores covariantes y contravariantes de la misma manera, es útil introducir la noción de categoría opuesta:

1.8. Definición. Sea **C** una categoría. Entonces su **categoría opuesta** $\mathbf{C}^\circ$ es la categoría donde

- los objetos son los mismos,

- un morfismo $f^\circ\colon X \to Y$ en $\mathbf{C}^\circ$ es un morfismo $f\colon Y \to X$ en $\mathbf{C}$ y la composición está definida por

$$g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^\circ\colon & X \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[rr, bend left, "g^\circ \circ f^\circ"] & Y \arrow[r, "g^\circ"] & Z \\
\mathbf{C}\colon & X & Y \arrow[l, "f"'] & Z \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f \circ g"]
\end{tikzcd}$$

1.9. Observación. *Un funtor contravariante $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ puede ser visto como un funtor covariante $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{D}$ o $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}^\circ$.*

(Muy a menudo se dice que un funtor F es contravariante y se escribe $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{D}$ para subrayar que es contravariante. En realidad, como funtor definido sobre $\mathbf{C}^\circ$, es covariante.)

1.10. Ejemplo. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y Y un objeto fijo. Para cada objeto X podemos considerar el conjunto de morfismos $X \to Y$:

$$Y \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y).$$

Cada morfismo $f\colon X \to X'$ induce una aplicación f^* por la composición con f. Noten que el único modo sensato de definirla es de tomar un morfismo $X' \xrightarrow{g} Y$ y componerlo con $X \xrightarrow{f} X'$:

$$(X \xrightarrow{f} X') \quad \rightsquigarrow \quad (\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)).$$

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, dashed, "g \circ f"'] \arrow[dl, "f"] \\
X' \arrow[u, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Vemos que esto define un funtor

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

En la primera lección hemos visto un caso especial cuando $\mathbf{C} = R\text{-}\mathbf{Mód}$ y tenemos funtores *con valores en la categoría de R-módulos*

$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(-, N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

La composición de este funtor con el funtor olvidadizo $R\text{-}\mathbf{Mód} \to \mathbf{Set}$ es exactamente el funtor

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(-, N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

▲

2. Transformaciones naturales entre funtores

Resumamos nuestra situación. En las matemáticas clásicas normalmente se estudiaban conjuntos con ciertas estructuras. Por ejemplo, un R-módulo M es un conjunto con estructura de grupo abeliano y acción de R que satisfacen ciertos axiomas, etc. El punto de vista categórico supone que, en vez de estudiar elementos de cada objeto, hay que estudiar las aplicaciones entre objetos. La definición de categorías no menciona elementos que "pertenecen" a objetos y en realidad no habla de aplicaciones: se trata solo de algunas flechas formales $X \to Y$ que se pueden componer. Otro nivel de razonamiento es de dar más importancia no a las categorías particulares, sino a los funtores entre categorías. Pero en realidad, las cosas más importantes no son ni categorías ni funtores, sino morfismos entre funtores:

2.1. Definición. Si $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ dos funtores entre categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, entonces una **transformación natural** $\alpha\colon F \Rightarrow G$ entre F y G es una colección de morfismos $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ en $\mathbf{D}$ para cada objeto X de $\mathbf{C}$ tal que para cada morfismo $X \to Y$ en $\mathbf{C}$ el siguiente diagrama en $\mathbf{D}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ Y & F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

2.2. Ejemplo. Tenemos funtores $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$. Cada morfismo

$$X \to X' \quad \text{y} \quad Y \to Y'$$

induce transformaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y').$$

Por ejemplo, en el primer caso, tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \arrow[d] & (X' \to Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (X \to X' \to Y) \arrow[d, mapsto] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y') & (X' \to Y \to Y') \arrow[r, mapsto] & (X \to X' \to Y \to Y') \end{tikzcd}$$

y el segundo caso corresponde a los mismos diagramas (pero la transformación natural corresponde a las flechas verticales). ▲

Si F y G son dos funtores $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, vamos a usar la notación

$$\mathrm{Nat}(F, G) := \{\text{transformaciones naturales } F \Rightarrow G\}.$$

En general $\mathrm{Nat}(F, G)$ no es un conjunto porque a priori los objetos de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ no forman conjuntos.

2.3. Observación. *Si F, G, H son tres funtores $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $\alpha\colon F \Rightarrow G$ y $\beta\colon G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales, entonces $\beta \circ \alpha\colon F \Rightarrow H$ definida por*

$$(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$$

es también una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Siempre existe la transformación natural identidad $\mathrm{Id}_F\colon F \Rightarrow F$ definida por $(\mathrm{Id}_F)_X := F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ para cada X. Es identidad respecto a la composición de transformaciones naturales.

Todo esto nos permite comparar funtores:

2.4. Definición. Se dice que dos funtores $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ son **isomorfos** si existen transformaciones naturales $\alpha\colon F \Rightarrow G$ y $\beta\colon G \Rightarrow F$ tales que $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_F$ y $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_G$.

3. Funtores representables y el lema de Yoneda

Por fin estamos listos para demostrar el hecho más importante de la teoría de categorías básica:

3.1. Proposición (Lema de Yoneda).

- *Para cada $X \in \mathbf{C}$ y cada funtor covariante $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -), F) \xrightarrow{\cong} F(X).$$

Aquí la naturalidad quiere decir que para cada morfismo $f\colon X \to X'$ y cada transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"] & F(X')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),G) \arrow[r, "\cong"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

($f\colon X \to X'$ induce una transformación natural $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$, y a su vez una aplicación entre conjuntos $f_*\colon \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -), F) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -), F)$ por la pre-composición; la transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ induce un morfismo entre conjuntos $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -), F) \Rightarrow \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -), G)$ por la post-composición con α.)

- *Para cada $Y \in \mathbf{C}$ y cada funtor contravariante $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y), F) \xrightarrow{\cong} F(Y).$$

Aquí la naturalidad quiere decir que para cada morfismo $f\colon X \to X'$ y cada transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] & F(X) \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "f^*"] & F(X') \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X),G) \arrow[r, "\cong"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Veamos, por ejemplo, el caso contravariante. Tenemos que definir una biyección

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y), F) \cong F(Y).$$

Voy a describir la construcción y dejo los detalles como un ejercicio.

A partir de una transformación natural $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y) \Rightarrow F$ debemos producir un elemento de $F(Y)$. De hecho, hay solo una posibilidad obvia: tenemos la aplicación $\alpha_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Y) \to F(Y)$ y el único elemento que seguramente contiene el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Y)$ es el morfismo identidad id_Y. Entonces, podemos considerar

$$\alpha_Y(\mathrm{id}_Y) \in F(Y).$$

Ahora bien, a partir de un elemento $y \in F(Y)$ tenemos que definir una transformación natural

$$\alpha^y\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y) \Rightarrow F,$$

es decir, una familia de morfismos

$$\alpha_X^y \colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to F(X).$$

Si tenemos un elemento $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, entonces F nos da una aplicación entre conjuntos $F(f) \colon F(Y) \to F(X)$. Podemos aplicar $F(f)$ a $y \in F(Y)$ para obtener un elemento de $F(X)$:

$$\alpha_X^y(f) := F(f)(y).$$

■

3.2. Ejercicio. *Provea los detalles necesarios:*

1) α_X^y *define una transformación natural* $\alpha^y \colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y) \Rightarrow F$;

2) *las correspondencias que hemos definido dan una biyección entre los conjuntos* $\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y), F)$ *y* $F(Y)$;

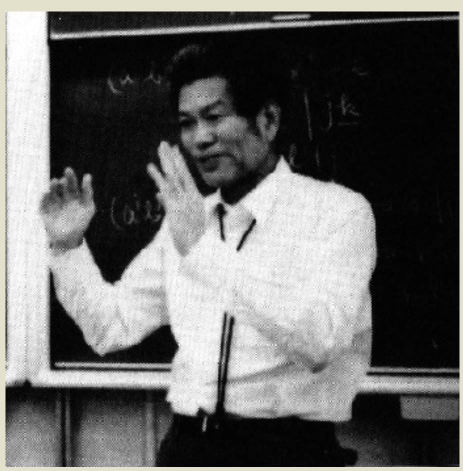
3) *esta biyección es natural.*

Nobuo Yoneda (1930–1996) fue un matemático japonés, conocido principalmente por el lema que lleva su nombre. Estudió matemáticas en la Universidad de Tokio y conoció a Eilenberg durante su visita a Japón. En ese tiempo empezó a estudiar el álgebra homológica, que todavía estaba en proceso de gestación como nueva área de las matemáticas (Eilenberg trabajaba junto con Cartan en su libro de texto "Homological algebra"). Yoneda obtuvo una beca para visitar a Eilenberg en Princeton, pero Eilenberg se había ido a París. Un año después Yoneda también se mudó a Francia donde conoció a Mac Lane. La leyenda dice que Mac Lane y Yoneda se encontraron en un café de la estación de París Norte y su conversación continuó en el tren de Yoneda justo antes de que este partiera. Fue en esta ocasión que Yoneda explicó a Mac Lane su famoso lema, cuyo origen es su artículo sobre el álgebra homológica

- Nobuo Yoneda. On the Homology Theory of Modules. Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics Vol. 7 No. 2, p. 193–227. MR 68832

Gracias a esta coincidencia, Mac Lane formuló el lema en términos de arriba y lo popularizó.

Después de su regreso a Japón, Yoneda trabajó en informática, en particular en el lenguaje de programación Algol, y tuvo posiciones en facultades de matemáticas e informática en varias universidades de Tokio.



Nobuo Yoneda

Lo siguiente es un caso particular del lema de Yoneda cuando $F = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$ o $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y)$:

3.3. Corolario (Encajamiento de Yoneda).

- *Para $X, X' \in \mathbf{C}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',X).$$

- *Para $Y, Y' \in \mathbf{C}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y')) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y').$$

El último resultado puede ser interpretado de la manera siguiente. Si $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, entonces para dos funtores $F, G\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ las transformaciones naturales $\mathrm{Nat}(F,G)$ forman un conjunto. Por lo tanto podemos considerar la categoría $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set})$ cuyos objetos son funtores $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales $F \Rightarrow G$. El lema de Yoneda nos dice que tenemos un funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}\colon \mathbf{C} &\to \mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set}),\\ X &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X), \end{aligned}$$

que es **fielmente pleno**, lo cual quiere decir que para cada par de objetos X, X' tenemos una biyección

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X') &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ,\mathbf{Set})}(\mathcal{Y}(X), \mathcal{Y}(X')),\\ f &\mapsto \mathcal{Y}(f). \end{aligned}$$

En consecuencia la categoría $\mathbf{C}$ puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría más grande $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set})$. El funtor $\mathcal{Y}$ recibe el nombre de **encajamiento de Yoneda** y tiene un rol fundamental en el álgebra. De modo similar, tenemos la versión contravariante

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}\colon \mathbf{C}^\circ &\to \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{Set}),\\ X &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-). \end{aligned}$$

3.4. Corolario.

- *Si $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ para algún objeto X, entonces X está definido de manera única salvo isomorfismo.*
- *Si $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ para algún objeto Y, entonces Y está definido de manera única salvo isomorfismo.*

Demostración. Por ejemplo, supongamos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) \cong F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-).$$

Este isomorfismo de funtores corresponde a un par de transformaciones naturales

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-), \quad \beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$$

tales que

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)}, \quad \alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-)}.$$

Por el encajamiento de Yoneda, α y β corresponden a morfismos $f\colon X' \to X$ y $g\colon X \to X'$, tales que $g \circ f = \mathrm{id}_{X'}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_X$. ∎

3.5. Definición. Si para un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ (resp. $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$) tenemos un isomorfismo $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$ (resp. $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)$) para algún objeto $X \in \mathbf{C}$, se dice que F es un funtor **representable**[*], y que F es **representado** por X. (Y Yoneda nos dice que este X es único salvo isomorfismo.)

Terminamos nuestra discusión de los funtores $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,-)$[**], con una propiedad importante: $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Z)$ preserva productos y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,-)$ convierte coproductos en productos (porque es un funtor contravariante):

3.6. Ejercicio. *Sea $Z \in \mathbf{C}$ un objeto fijo. Demuestre a partir de las propiedades universales de productos y coproductos que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,-)$ preserva productos y que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Z)$ convierte coproductos en productos. Es decir, si existen productos $X \times Y$ y coproductos $X \sqcup Y$, entonces tenemos biyecciones naturales entre conjuntos*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, X\times Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)\times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y),\\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X\sqcup Y, Z) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)\times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} X \xleftarrow{p_X} X\times Y \xrightarrow{p_Y} Y & \rightsquigarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X) \xleftarrow{p_{X*}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X\times Y) \xrightarrow{p_{Y*}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)\\ X \xrightarrow{i_X} X\sqcup Y \xleftarrow{i_Y} Y & \rightsquigarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z) \xleftarrow{i_X^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X\sqcup Y,Z) \xrightarrow{i_Y^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z) \end{array}$$

En otras palabras, $X \times Y$ es el objeto que representa al funtor

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)\times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y)\colon \mathbf{C}^\circ &\to \mathbf{Set},\\ Z &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)\times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y). \end{aligned}$$

y $X \sqcup Y$ es el objeto que representa al funtor

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)\times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,-)\colon \mathbf{C} &\to \mathbf{Set},\\ Z &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)\times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z). \end{aligned}$$

De la misma manera, cuando productos $\prod_i X_i$ y coproductos $\coprod_i X_i$ existen, tenemos isomorfismos de funtores

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\prod_i X_i) &\cong \prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X_i),\\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\coprod_i X_i,-) &\cong \prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i,-). \end{aligned}$$

Entonces, los productos y coproductos pueden ser definidos como objetos que representan a los funtores $\prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X_i)$ y $\prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i,-)$.

Los funtores representables son un pilar de las matemáticas porque muchas construcciones universales pueden ser formuladas en términos de representabilidad. El lema de Yoneda tiene el privilegio de ser uno de los resultados más tautológicos y profundos al mismo tiempo.

[*] En el caso contravariante $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ algunos dicen que F es **correpresentado** por X, pero yo no voy a usar esta terminología.

[**] Note que $(-,-)$ parece un *smiley* japonés.