Ejercicios para el curso sobre los números de Bernoulli

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Febrero de 2017

Cada ejercicio vale 1 punto. Favor enviar sus soluciones al correo electrónico `cadadr@gmail.com`.

Ejercicio 1. Para la función

$$S_k(n) := \sum_{1\le i\le n} i^k$$

deduzca la expresión en términos de los números de Bernoulli

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{0\le i\le k} \binom{k+1}{i} B_i\, n^{k+1-i}.$$

Ejercicio 2. Definamos

$$\operatorname{sen} t := \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}, \qquad \cos t := \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k}$$

como series de potencias formales en $\mathbb{C}[[t]]$.

1. Calcule las derivadas formales correspondientes.
2. Demuestre las identidades con series formales

$$\begin{gathered} \cos t + i\, \operatorname{sen} t = e^{it}, \\ (\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 = 1, \\ \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}. \end{gathered}$$

Ejercicio 3. Calcule los coeficientes de la serie de potencias formal

$$\frac{1}{1-(t+t^2)}.$$

Indicación: se puede primero calcular algunos términos y tratar de adivinar el patrón.

Ejercicio 4. Para $f(t) := t + t^2$, encuentre la serie de potencias formal $g(t)$ tal que $f(g(t)) = g(f(t)) = t$.

Ejercicio 5.

1. Demuestre la identidad

$$(2k+1)\,B_{2k} = -\sum_{1\le \ell \le k-1} \binom{2k}{2\ell} B_{2\ell}\, B_{2\,(k-\ell)} \quad \text{para } k \ge 2.$$

   Indicación: considere la función generatriz para los números de Bernoulli pares $f(t) := \frac{t\,e^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \sum_{k\ge 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k}$. Demuestre la identidad con la derivada formal $f(t) - t\,f(t)' = f(t)^2 - \frac{t^2}{4}$; sustituya $f(t)$ por $\sum_{k\ge 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k}$ y compare los coeficientes de t^{2k}.

2. Demuestre por inducción que $(-1)^{k+1}\, B_{2k} > 0$ para todo $k \ge 1$.

Ejercicio 6. Demuestre que $\left[{k \atop k-1}\right] = \binom{k}{2}$.

Ejercicio 7. Usando las recurrencias, defina los números de Stirling $\left[{k \atop \ell}\right]$ y $\left\{{k \atop \ell}\right\}$ para todo $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

1. Demuestre que

$$\begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\ell \\ -k \end{Bmatrix}.$$

2. Demuestre que $\left\{{k \atop \ell}\right\} = 0$ para $k\ell < 0$.

Ejercicio 8. Demuestre la identidad

$$\frac{(-\ln(1-t))^\ell}{\ell!} = \sum_{k\ge \ell} \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!}.$$

Ejercicio 9. Definamos los **polinomios de Euler** por la función generatriz

$$\frac{2\,e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{k\ge 0} E_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

1. Demuestre las siguientes identidades (parecidas a las identidades para los polinomios de Bernoulli):

$$\begin{gathered} E_k(x+1) - E_k(x) = 2\,(x^k - E_k(x)), \\ E_k(1-x) = (-1)^k\, E_k(x), \\ E_k(1) = -E_k(0), \\ E_k'(x) = k\, E_{k-1}(x). \end{gathered}$$

2. Compile la lista de los primeros $E_k(x)$ hasta $k = 6$.

3. El **número de Euler** E_k está definido por la función generatriz con el **coseno hiperbólico**:

$$\frac{1}{\cosh t} := \frac{2}{e^t + e^{-t}} := \sum_{k\ge 0} \frac{E_k}{k!}\, t^k.$$

   Demuestre que $E_k = 0$ para k impar.

4. Demuestre que $E_k = 2^k\, E_k\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 10. Calcule la factorización en números primos del denominador del número de Bernoulli B_{30}.