

Álgebra I. Tarea 1: Permutaciones

Universidad de El Salvador. Fecha límite: 13.03.2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 1.1. Encuentre la descomposición en ciclos disjuntos para la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

y su signo.

Ejercicio 1.2. Calcule la descomposición en ciclos disjuntos del producto de ciclos

$$(1\ 2)(2\ 5\ 3)(1\ 5\ 7\ 3\ 2\ 6\ 4)(4\ 7\ 6) \in S_7$$

y su signo.

Ejercicio 1.3. Demuestre la fórmula para el signo de un k -ciclo:

$$\text{sgn}(i_1\ i_2\ \dots\ i_k) = (-1)^{k-1}.$$

En general, si $\sigma \in S_n$ afecta m elementos (en el sentido de que $\sigma(i) \neq i$ para m números i) y tiene una descomposición en s ciclos disjuntos, entonces

$$\text{sgn}\ \sigma = (-1)^{m-s}.$$

Por ejemplo,

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 6\ 4)(5\ 11\ 8)$$

afecta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, entonces $m = 8$, y en la expresión de arriba hay $s = 3$ ciclos disjuntos. Entonces, $\text{sgn}\ \sigma = (-1)^{8-3} = -1$.

Ojo: según nuestra terminología, el último ejercicio nos dice que una permutación cíclica de orden par k es impar (tiene signo -1) y viceversa.

Para realizar cualquier permutación, se puede fijar algún elemento y cada vez hacer intercambios solo con este.

Ejercicio 1.4. Fijemos algún elemento de $\{1, \dots, n\}$, por ejemplo 1. Demuestre que toda transposición $(i\ j)$ puede ser escrita como una composición de transposiciones de la forma $(1\ k)$. Deduzca que toda permutación $\sigma \in S_n$ para $n \geq 2$ es un producto de transposiciones

$$(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n).$$

De hecho, para expresar cualquier permutación, es suficiente usar una sola transposición, un n -ciclo y su inverso.

Ejercicio 1.5. Demuestre que todo elemento de S_n puede ser expresado como un producto de

$$(1\ 2), (1\ 2\ \dots\ n), (1\ 2\ \dots\ n)^{-1}.$$

Indicación: use que los elementos de S_n se expresan como productos de transposiciones de la forma $(i\ i+1)$ y la fórmula $\sigma(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \dots\ \sigma(i_k))$.

En los siguientes ejercicios vamos a demostrar un resultado similar para los grupos alternantes.

Ejercicio 1.6. Sean i, j, k, ℓ números distintos. Verifique las relaciones para la composición de transposiciones

$$(i j)(j k) = (i j k),$$
$$(i j)(k \ell) = (i j k)(j k \ell).$$

Deduzca que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de orden 3.

Ejercicio 1.7. Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de la forma $(1 i j)$.

Indicación: use el ejercicio 1.6.

Ejercicio 1.8. Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de la forma $(1 2 i)$.

Indicación: use el ejercicio 1.7.

Ejercicio 1.9. Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de la forma $(i i + 1 i + 2)$.

Indicación: note que es un análogo de la descomposición de los elementos de S_n mediante las transposiciones de la forma $(i i + 1)$. Para $i > 3$ demuestre la identidad

$$(1 2 i) = (1 2 i - 2)(1 2 i - 1)(i - 2 i - 1 i)(1 2 i - 2)(1 2 i - 1)$$

Luego, proceda por inducción sobre i y use el ejercicio 1.8.

Ejercicio 1.10. Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n puede ser escrito como el producto de

- $(1 2 3), (2 3 \cdots n), (2 3 \cdots n)^{-1}$, si n es par;
- $(1 2 3), (1 2 \cdots n), (1 2 \cdots n)^{-1}$, si n es impar.

Indicación: use la fórmula $\sigma(i_1 i_2 \cdots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \cdots \sigma(i_k))$ y el ejercicio 1.9.

La moraleja de los ejercicios de arriba: aunque S_n y A_n tienen muchos elementos, estos se expresan en términos de solamente dos de ellos (y sus inversos).