Álgebra I. Tarea 4: Grupos de unidades
Universidad de El Salvador. Fecha límite: 26.04.2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 4.1. *Para el anillo de los enteros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\zeta_3]$, calcule el grupo de unidades $\mathbb{Z}[\zeta_3]^\times$ y escriba la tabla de multiplicación correspondiente.*
Indicación: considere la norma

$$N(a + b\,\zeta_3) := (a + b\,\zeta_3)\,\overline{(a + b\,\zeta_3)} = a^2 - ab + b^2.$$

Ejercicio 4.2. *Sea R un anillo conmutativo. Se dice que un elemento $u \in R$ es una* ***unidad*** *si existe un elemento $u^{-1} \in R$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$. Se dice que $x \in R$ es un* ***nilpotente*** *si existe un número $n = 1, 2, 3, \ldots$ tal que $x^n = 0$.*

Encuentre las unidades y nilpotentes en los anillos $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Ejercicio 4.3. *Continuemos con las nociones introducidas en el ejercicio precedente. Sea R un anillo conmutativo.*

1) *Demuestre que si $x \in R$ es un nilpotente y $a \in R$ es cualquier elemento del anillo, entonces ax es un nilpotente.*

2) *Demuestre que si $x, y \in R$ son nilpotentes, entonces $x + y$ es también un nilpotente.*

3) *Demuestre que si $x \in R$ es un nilpotente, entonces $1 + x$ es una unidad.*

   Indicación: recuerde la identidad

   $$(1 + X) \cdot (1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \cdots) = 1$$

   en $R[\![X]\!]$.

4) *Demuestre que si $u \in R$ es una unidad y $x \in R$ es un nilpotente, entonces $u + x$ es una unidad.*

Ejercicio 4.4. *Calcule la matriz inversa para las siguientes matrices:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_3), \quad \begin{pmatrix} 1 & X & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}[X]).$$

Ejercicio 4.5. *Consideremos las matrices de $n \times n$ que tienen 1 en las entradas diagonales, ceros debajo de la diagonal y números arbitrarios arriba de la diagonal.*

$$\{(x_{ij}) \mid x_{ii} = 1 \text{ para todo } i,\ x_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}.$$

Por ejemplo, para $n = 3$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que estas matrices forman un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(R)$.

Ejercicio 4.6. *Consideremos el conjunto de matrices*

$$O_n(k) = \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid A^t\,A = A\,A^t = I\},$$

donde A^t denota la matriz transpuesta.

1) *Demuestre que $O_n(k)$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(k)$. Este se llama el* ***grupo ortogonal*** *sobre k.*

2) *Para $n = 2$ y $k = \mathbb{R}$ demuestre que los elementos de $O_2(\mathbb{R})$ son de la forma*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad o \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3) *Demuestre que el grupo diédrico D_n es un subgrupo de $O_2(\mathbb{R})$. Escriba las matrices* * *que corresponden a los elementos r y f.*

Ejercicio 4.7. *Demuestre que el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es infinito.*

Ejercicio 4.8. *Demuestre que las únicas matrices invertibles que conmutan con todas las matrices son las* ***matrices escalares***

$$aI = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \quad \text{para } a \in R^\times.$$

Es decir,

$$Z(\mathrm{GL}_n(R)) = \{aI \mid a \in R^\times\}.$$

1) *Fijemos algunos índices $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$. Denotemos por e_{ij} la matriz de $n \times n$ cuyos coeficientes son nulos, excepto el coeficiente (i, j) que es igual a 1. Consideremos las matrices $I + e_{ij}$. Estas tienen ceros en todas las entradas, excepto 1 en la posición (i, j) y en la diagonal. Demuestre que*

$$\det(I + e_{ij}) = 1$$

En particular, $I + e_{ij} \in \mathrm{GL}_n(R)$.

2) *Supongamos que $A \in Z(\mathrm{GL}_n(R))$. En particular, debe cumplirse*

$$(I + e_{ij})\, A = A\, (I + e_{ij}),$$

que es equivalente a la identidad

$$e_{ij}\, A = A\, e_{ij}$$

en el anillo de matrices $M_n(R)$. Recuerde la tarea anterior donde hemos visto que esto implica que A es una matriz escalar.

3) *Note que el centro de $Z(\mathrm{SL}_n(R))$ también consiste en las matrices escalares (de determinante 1).*

Ejercicio 4.9. *Demuestre que una serie formal de potencias $f = \sum_{i \ge 0} a_i\, X^i \in R[\![X]\!]$ es invertible (pertenece a $R[\![X]\!]^\times$) si y solamente si su coeficiente constante es invertible ($a_0 \in R^\times$).*

Ejercicio 4.10. *Calcule las series $(1 - X)^{-1}$, $(1 - X^2)^{-1}$, $(1 - (X + X^2))^{-1}$ en el anillo $\mathbb{Z}[\![X]\!]$.*

---

* En este ejercicio hay que identificar las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matrices de 2×2.