Álgebra I. Tarea 6: Generadores de grupos
Universidad de El Salvador. Fecha límite: 16.05.2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 6.1. *Sea G un grupo. Supongamos que para dos elementos $g, h \in G$ se cumple $h = k\,g\,k^{-1}$ para algún $k \in G$ (en este caso se dice que g y h son **conjugados**). Demuestre que el orden de g es finito si y solamente si el orden de h es finito, y en este caso $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} h$.*

Ejercicio 6.2. *Describa todos los tipos de ciclo posibles en el grupo simétrico S_5 y encuentre los ordenes correspondientes.*

Ejercicio 6.3. *Exprese la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ como un producto de matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Ejercicio 6.4. *Demuestre que el conjunto*

$$X = \left\{1/p^k \mid p \text{ primo}, k = 0, 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

genera el grupo aditivo $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 6.5. *Encuentre los elementos de orden finito en el grupo de isometrías del plano euclidiano $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

Ejercicio 6.6. *Supongamos que G es un grupo finito de orden par. Demuestre que G tiene un elemento de orden 2.*

Ejercicio 6.7. *Supongamos que G es un grupo no trivial que no tiene subgrupos propios. Demuestre que G es un grupo cíclico finito de orden p, donde p es un número primo.*

El ejemplo de $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ demuestra que para dos elementos de orden finito, su producto puede tener orden infinito y además que un número finito de elementos de orden finito pueden generar un grupo infinito. Esto sucede gracias a la nonconmutatividad. La situación en grupos abelianos es más sencilla.

Ejercicio 6.8. *Sea A un grupo abeliano (escrito en la notación aditiva).*

1) *Sea $m = 1, 2, 3, \ldots$ un número fijo. Demuestre que los elementos $a \in A$ tales que $m \cdot a = 0$ forman un subgrupo de A. Este se denota por $A[m]$ y se llama el **subgrupo de m-torsión** en A.*

2) *Demuestre que todos los elementos de orden finito en A forman un subgrupo. Este se llama el **subgrupo de torsión** y se denota por A_{tors}:*
$$A_{tors} = \bigcup_{m \geq 1} A[m].$$

3) *Encuentre los grupos $A[m]$ y A_{tors} para $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$.*

Ejercicio 6.9. *Sea A un grupo abeliano.*

1) *Demuestre que para todo homomorfismo $f\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to A$ se tiene necesariamente $f([1]_m) \in A[m]$.*

2) *Demuestre que*
$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \to A[m], \quad f \mapsto f([1]_m)$$
es una biyección.

3) *Describa todos los homomorfismos de grupos abelianos*

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

para diferentes $m, n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

Ejercicio 6.10. *Demuestre que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.