

Álgebra I. Tarea 7: Clases laterales

Universidad de El Salvador. Fecha límite: 31.05.2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 7.1. Demuestre que si $H \subset G$ es un subgrupo de índice $|G : H| = 2$, entonces H es normal.

Ejercicio 7.2. Demuestre que todo cociente de un grupo cíclico es cíclico.

Ejercicio 7.3 (Segundo teorema de isomorfía). Sea G un grupo, sea $H \subset G$ un subgrupo y $K \subset G$ un subgrupo normal.

1) Demuestre que $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ es un subgrupo de G .

2) Demuestre que K es un subgrupo normal de HK .

3) Demuestre que la aplicación

$$H \rightarrow HK/K, \quad h \mapsto hK$$

es un homomorfismo sobreyectivo de grupos y su núcleo es $H \cap K$.

4) Deduzca que $H/(H \cap K) \cong HK/K$.

Ejercicio 7.4. Para un cuerpo k sea $G = GL_2(k)$, $H = SL_2(k)$, $K = k^\times \cdot I \subset GL_2(k)$. Deduzca que

$$SL_2(k)/\{\pm I\} \cong GL_2(k)/k^\times.$$

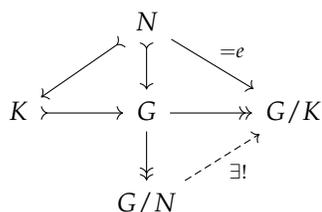
Ejercicio 7.5 (Tercer teorema de isomorfía). Sea G un grupo. Sea K un subgrupo normal de G y sea N un subgrupo de K tal que N es normal en G .

1) Demuestre que la aplicación

$$G/N \rightarrow G/K, \quad gN \mapsto gK$$

está bien definida y es un homomorfismo sobreyectivo y su núcleo es $K/N \subset G/N$.

Indicación: se puede usar la propiedad universal de G/N :



2) Deduzca que $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.

Ejercicio 7.6. Sean m y n dos enteros positivos tales que $n \mid m$, así que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$. Demuestre que

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Se dice que un grupo abeliano A un elemento $x \in A$ es **divisible** si para todo $a \in A$ y todo entero positivo $n = 1, 2, 3, \dots$ existe $b \in A$ (no necesariamente único) tal que $nb = a$. Si todos los elementos de A son divisibles, se dice que A es un **grupo divisible**.

Ejercicio 7.7.

- 1) Demuestre que los grupos aditivos \mathbb{Q} y \mathbb{R} son divisibles.
- 2) Demuestre que un grupo abeliano finito no nulo nunca es divisible.

Ejercicio 7.8. Sea p un número primo. El p -grupo de Prüfer es el grupo de las raíces de la unidad de orden p^n para $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) := \bigcup_{n \geq 0} \mu_{p^n}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^{p^n} = 1 \text{ para algún } n = 0, 1, 2, \dots\}$$

- 1) Demuestre que $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$ es divisible.
- 2) Demuestre que existe un isomorfismo $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ donde

$$\mathbb{Z}[1/p] := \{a/p^n \mid a \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Ejercicio 7.9.

- 1) Demuestre que todos los elementos divisibles forman un subgrupo

$$A_{div} := \{a \in A \mid a \text{ es divisible}\}.$$

Este se llama el **subgrupo máximo divisible** de A .

- 2) Sea $f: A \rightarrow B$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que si $a \in A$ es divisible, entonces $f(a) \in B$ es también divisible. En particular, f se restringe a un homomorfismo $A_{div} \rightarrow B_{div}$.

$$\begin{array}{ccc} A_{div} & \dashrightarrow & B_{div} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

- 3) Demuestre que todo grupo cociente de un grupo divisible es también divisible. En particular, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} y \mathbb{R}/\mathbb{Z} son divisibles.

Ejercicio 7.10. Demuestre que no hay homomorfismos no triviales $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.