Álgebra II. Hoja de ejercicios 2: Ideales
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 1. *Sea R un anillo conmutativo y G un grupo. Consideremos el homomorfismo*

$$\epsilon\colon R[G] \twoheadrightarrow R, \quad \sum_{g\in G} a_g\, g \mapsto \sum_{g\in G} a_g.$$

1) *Demuestre que el ideal $I_G := \ker \epsilon$ está generado por los elementos $g - e$ para $g \in G$. Este se llama el* ***ideal de aumento***.

2) *En particular, si $G = C_n = \{e, g, \ldots, g^{n-1}\}$ es el grupo cíclico de orden n generado por g, demuestre que $\ker \epsilon$ está generado por el elemento $g - e$.*

Ideales

Ejercicio 2. *Sea R un anillo y $S \subseteq R$ un subanillo.*

1) *Demuestre que para todo ideal $I \subseteq R$ (izquierdo, derecho, bilateral) la intersección $I \cap S$ es un ideal en S (izquierdo, derecho, bilateral).*

2) *Encuentre un ejemplo de $S \subset R$ donde no todos los ideales de S son de la forma $I \cap S$.*

Ejercicio 3. *Sea R un anillo y sean I, J, K ideales bilaterales. Demuestre que $I\,(J + K) = IJ + IK$ y $(I + J)\,K = IK + JK$.*

Ejercicio 4. *Sea R un anillo. Para un ideal izquierdo $I \subseteq R$ definamos el* ***aniquilador*** *por*

$$\operatorname{Ann} I := \{r \in R \mid rx = 0 \text{ para todo } x \in I\}.$$

Demuestre que esto es un ideal bilateral en R.

Ejercicio 5. *Sea R un anillo conmutativo y $M_n(R)$ el anillo de matrices correspondiente.*

1) *Sea $I \subseteq R$ un ideal. Denotemos por $M_n(I)$ el conjunto de las matrices que tienen como sus entradas elementos de I. Verifique que $M_n(I)$ es un ideal bilateral en $M_n(R)$.*

2) *Sea $J \subseteq M_n(R)$ un ideal bilateral. Sea I el conjunto de los coeficientes que aparecen en la entrada $(1, 1)$ de las matrices que pertenecen a J. Demuestre que I es un ideal en R.*

3) *Demuestre que $J = M_n(I)$. (Use las mismas ideas que ocupamos en clase para encontrar los ideales bilaterales en $M_n(k)$.)*

Entonces, todo ideal en el anillo de matrices $M_n(R)$ es de la forma $M_n(I)$ para algún ideal $I \subseteq R$.

Nilradical y radical

Ejercicio 6. *Sea R un anillo conmutativo.*

1) *Demuestre que el conjunto de nilpotentes*

$$N(R) := \{x \in R \mid x^n = 0 \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

es un ideal en R. Este se llama el ***nilradical*** *de R.*

2) Demuestre que en el anillo no conmutativo $M_n(R)$ los nilpotentes no forman un ideal.

Ejercicio 7. *Sea R un anillo conmutativo. Supongamos que el nilradical de R es finitamente generado; es decir, $N(R) = (x_1, \ldots, x_n)$ donde x_i son algunos nilpotentes. Demuestre que en este caso $N(R)$ es un **ideal nilpotente**:*

$$N(R)^m := \underbrace{N(R) \cdots N(R)}_{m} = 0$$

para algún $m = 1, 2, 3, \ldots$

Ejercicio 8. *Sea R un anillo conmutativo y sea $I \subset R$ un ideal. Demuestre que*

$$\sqrt{I} := \{x \in R \mid x^n \in I \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

*es también un ideal en R, llamado el **radical** de I. (Note que el nilradical $N(R) = \sqrt{(0)}$ es un caso particular.)*

Operaciones I y V

Los últimos dos ejercicios son opcionales.

Ejercicio 9 (*). *Sea k un cuerpo. Sean J, J_1, J_2 ideales en $k[X_1, \ldots, X_n]$ y sean X, Y subconjuntos de $\mathbb{A}^n(k)$. Demuestre las siguientes relaciones.*

0) $I(\emptyset) = k[X_1, \ldots, X_n]$, $V(0) = \mathbb{A}^n(k)$, $V(1) = V(k[X_1, \ldots, X_n]) = \emptyset$.

1) Si $J_1 \subseteq J_2$, entonces $V(J_2) \subseteq V(J_1)$.

2) Si $X \subseteq Y$, entonces $I(Y) \subseteq I(X)$.

3) $V(J) = V(\sqrt{J})$.

4) $J \subseteq \sqrt{J} \subseteq IV(J)$. Demuestre que la inclusión es estricta para $J = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$.

5) $X \subseteq VI(X)$.

6) $VIV(J) = V(J)$ y $IVI(X) = I(X)$.

Ejercicio 10 (**).

1) Demuestre que $I(\mathbb{A}^n(k)) = (0)$ si k es un cuerpo infinito.

2) Note que $X^p - X \in I(\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p))$, así que esto es falso para cuerpos finitos.