Álgebra II. Hoja de ejercicios 8: Polinomios irreducibles y cuerpos
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Polinomios irreducibles (continuación)

Ejercicio 1. *Factorice el polinomio* $X^4 + 4$ *en polinomios irreducibles en* $\mathbb{Z}[X]$.

Ejercicio 2. *Consideremos el polinomio* $f = X^3 + 8X^2 + 6 \in \mathbb{Z}[X]$.

1) *Demuestre que* f *es irreducible usando el criterio de Eisenstein.*
2) *Factorice este polinomio en* $\mathbb{F}_p[X]$ *para* $p = 2, 3, 5, 7$.
   (En efecto, el primer primo p *tal que* $\overline{f}$ *queda irreducible en* $\mathbb{F}_p[X]$ *es* 29.*)*

Ejercicio 3. *Factorice el polinomio* $X^n + Y^n$ *en polinomios lineales en* $\mathbb{C}[X, Y]$.

Ejercicio 4 (Teorema de las raíces racionales)**.** *Sea*

$$f = a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_1\, X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

un polinomio con coeficientes enteros. Demuestre que si $\frac{a}{b}$ *es una raíz racional de* f *tal que* $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$, *entonces* $a \mid a_0$ *y* $b \mid a_n$.

Ejercicio 5. *Consideremos el polinomio* $f = X^3 - nX + 2 \in \mathbb{Z}[X]$. *Demuestre que es irreducible para todo* $n \neq -1, 3, 5$. *Encuentre sus factorizaciones para* $n = -1, 3, 5$.
Indicación: use el ejercicio anterior.

Ejercicio 6. *Encuentre los coeficientes en la expansión de los polinomios ciclotómicos* Φ_{10} *y* Φ_{15}.

Ejercicio 7. *Sea* p *un número primo. Factorice el polinomio ciclotómico* Φ_{p^k} *en* $\mathbb{F}_p[X]$.

Cuerpos

Ejercicio 8. *Sea* K *un cuerpo y*

$$f = X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_1\, X + a_0 \in K[X]$$

un polinomio irreducible. Denotemos por α *la imagen de* X *en el cociente* $L := K[X]/(f)$. *Encuentre una fórmula explícita para* α^{-1} *en términos de la base* $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$.

Ejercicio 9. *Consideremos el polinomio* $f := X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

1) *Demuestre que* f *es irreducible.*
2) *Denotemos por* α *la imagen de* X *en el cociente* $K := \mathbb{Q}[X]/(f)$. *Exprese los elementos*

   $$(\alpha^2 + \alpha + 1)\,(\alpha^2 + \alpha), \quad (\alpha - 1)^{-1} \in K$$

   en términos de la base $1, \alpha, \alpha^2$.

Ejercicio 10. *Encuentre un polinomio cúbico irreducible* $f \in \mathbb{F}_2[X]$ *y considere el cuerpo* $k := \mathbb{F}_2[X]/(f)$. *Verifique directamente que el grupo* $k^\times$ *es cíclico mostrando que todos sus elementos son potencias de un generador.*