Solución del examen corto 8

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

8 de noviembre de 2018

Consideremos el polinomio

$$f := X^3 - 2X^2 - 2X - 2.$$

1) *Verifiquemos que f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.*

   En este caso particular tenemos suerte y podemos usar el criterio de Eisenstein para $p = 2$: todos los coeficientes menores son divisibles por 2 y el término constante no es divisible por 4.

   A la mayoría les tocaron polinomios irreducibles que no satisfacen el criterio de Eisenstein, como por ejemplo $g = X^3 - 2X^2 - 2X - 1$. En este caso las sustituciones como $g(X \pm 1)$ tampoco ayudan: tenemos $g(X+1) = X^3 + X^2 - 3X - 4$ y $g(X-1) = X^3 - 5X^2 + 5X - 2$.

   Sin embargo, el polinomio en cuestión es siempre cúbico, así que en cualquier caso sería suficiente verificar que este no tiene raíces racionales. Según el **teorema de las raíces racionales** (véase la hoja de ejercicios 8), las posibles raíces racionales de un polinomio mónico $f \in \mathbb{Z}[X]$ son enteras y dividen al término constante. En nuestro caso, las posibles raíces racionales de f son ± 1 y ± 2. Calculamos

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -5 \neq 0, \\ f(-1) &= (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = -3 \neq 0, \\ f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = -6 \neq 0, \\ f(-2) &= (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2 = -14 \neq 0. \end{aligned}$$

   Entonces, f es irreducible.

2) *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una de las raíces de f. Encontremos el polinomio mínimo de $1 + \alpha$ sobre $\mathbb{Q}$.*

   Lo que vamos a calcular es el *polinomio característico* de $1 + \alpha$ respecto a la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$. Como una base de $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ se puede tomar $1, \alpha, \alpha^2$. Notamos que

$$\alpha^3 = 2\alpha^2 + 2\alpha + 2.$$

   Calculamos

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1 + \alpha) &= 1 + \alpha, \\ \alpha \cdot (1 + \alpha) &= \alpha + \alpha^2, \\ \alpha^2 \cdot (1 + \alpha) &= \alpha^2 + \alpha^3 = 3\alpha^2 + 2\alpha + 2. \end{aligned}$$

   Entonces, la multiplicación por $1 + \alpha$ sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$ en la base $1, \alpha, \alpha^2$ se representa por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico correspondiente:

$$\det \begin{pmatrix} X-1 & 0 & -2 \\ -1 & X-1 & -2 \\ 0 & -1 & X-3 \end{pmatrix} = (X-1)\,\det \begin{pmatrix} X-1 & -2 \\ -1 & X-3 \end{pmatrix} - 2\,\det \begin{pmatrix} -1 & X-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (X-1)\,\Big((X-1)\,(X-3)-2\Big) - 2 = (X-1)\,(X^2-4X+1) - 2 = X^3-5X^2+5X-3.$$

Notamos que $\mathbb{Q}(\alpha+1) = \mathbb{Q}(\alpha)$, así que el polinomio característico de $1+\alpha$ que acabamos de calcular coincide con su polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}$.

3) Recordemos que la norma y traza se recuperan de los coeficientes del polinomio característico:

$$N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(1+\alpha) = -a_0 = 3, \quad T_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(1+\alpha) = -a_2 = 5.$$

4) *Demostremos que* $\sqrt[n]{1+\alpha} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ *para ningún* $n = 2,3,4,\ldots$

Supongamos que $1+\alpha = \beta^n$ para algún $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Luego, por la multiplicatividad de la norma,

$$3 = N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(1+\alpha) = N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\beta^n) = N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\beta)^n,$$

donde $N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\beta) \in \mathbb{Q}$. Esto es imposible para $n > 1$.

Este ejercicio usa las mismas ideas que los últimos tres ejercicios de la hoja 9.

Cálculo general

Si el polinomio viene dado por

$$f = X^3 + a\,X^2 + b\,X + c$$

para algunos $a, b, c \in \mathbb{Q}$, entonces

$$\alpha^3 = -a\,\alpha^2 - b\,\alpha - c.$$

Calculamos que

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1+\alpha) &= 1 + \alpha, \\ \alpha \cdot (1+\alpha) &= \alpha + \alpha^2, \\ \alpha^2 \cdot (1+\alpha) &= \alpha^2 + \alpha^3 = (1-a)\,\alpha^2 - b\,\alpha - c. \end{aligned}$$

Entonces, la multiplicación por $1+\alpha$ se representa por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 1 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico correspondiente es

$$\det \begin{pmatrix} X-1 & 0 & c \\ -1 & X-1 & b \\ 0 & -1 & X-1+a \end{pmatrix} = (X-1)\,\det \begin{pmatrix} X-1 & b \\ -1 & X-1+a \end{pmatrix} + c\,\det \begin{pmatrix} -1 & X-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$(X-1)\,\Big((X-1)\,(X-1+a) + b\Big) + c = X^3 + (a-3)\,X^2 + (-2a+b+3)\,X + (a-b+c-1).$$

De la misma manera, la multiplicación por $1-\alpha$ se representa por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es

$$X^3 - (a+3)\,X^2 + (2a+b+3)\,X - (a+b+c+1).$$