Álgebra computacional. Examen parcial 2
Universidad de El Salvador, 13/06/2019

Ejercicios teóricos

Ejercicio 1 (2 puntos). Sea A una k-álgebra finitamente generada. Demuestre que

$$\dim A = 0 \iff \dim_k A < \infty$$

(aquí "dim" denota la dimensión de Krull y "$\dim_k$" denota la dimensión de k-espacio vectorial).

Ejercicio 2 (2 puntos). Consideremos un ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_m]$. Sea $\widetilde{I}$ el ideal generado por los elementos de I en $k[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$. Describa la relación entre las series de Hilbert $H_I(t)$ y $H_{\widetilde{I}}(t)$.

Ejercicio 3 (2 puntos). Hemos probado en clase que para la serie de Hilbert

$$H_I(t) = \sum_{d \ge 0} h_I(d)\, t^d = \frac{a_m\, t^m + \cdots + a_1\, t + a_0}{(1-t)^n}$$

el polinomio de Hilbert $p_I \in \mathbb{Q}[x]$ cumple

$$p_I(d) = h_I(d) \quad \text{para } d \gg 0.$$

Demuestre que esto sucede precisamente para $d > m - n$; es decir,

$$\text{máx}\{d \mid p_I(d) \ne h_I(d)\} = m - n.$$

Ejercicio práctico

Se puede usar Macaulay2 para comprobar los cálculos, pero no se puede referir al programa en las soluciones. Todos los pasos deben ser justificados.

Ejercicio 4 (4 puntos). Sea k un cuerpo. Consideremos el ideal

$$I := (xy^2, x^2yz^2) \subset k[x, y, z]$$

y la k-álgebra correspondiente

$$A := k[x, y, z]/I.$$

1) Encuentre una descomposición primaria minimal de I y los primos asociados, minimales y encajados.
2) Calcule la serie de Hilbert $H_I(t)$ y el polinomio de Hilbert $p_I(x)$.
3) Calcule la dimensión de Krull de A.
4) Encuentre una normalización de Noether para A.