Álgebra computacional. Tarea 1. Fecha límite: 21/03/2019
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Ejercicio 1. Implemente en Macaulay2 la función `mcd(`f `,` g`)` que calcula el máximo común divisor de $f, g \in k[x]$ usando el algoritmo de Euclides. (Para el resto de división, use el operador `%`.)

Ejercicio 2. Demuestre que sobre los polinomios en una variable $k[x]$ hay un solo orden monomial que viene dado por

$$1 \prec x \prec x^2 \prec x^3 \prec \cdots;$$

es decir, $x^m \prec x^n \iff m < n$.

Ejercicio 3. Demuestre que $\prec_{lex}, \prec_{grlex}, \prec_{grevlex}$ son órdenes monomiales.

Ejercicio 4. Consideremos la siguiente propiedad: para cualesquiera α, β existe un número finito de monomios x^γ tales que $x^\alpha \prec x^\gamma \prec x^\beta$. ¿Para cuáles órdenes monomiales entre $\prec_{lex}$, $\prec_{grlex}$ y $\prec_{grevlex}$ esto es cierto?

Ejercicio 5. Fijemos algún orden monomial sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Sean $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomios no nulos. Demuestre las siguientes propiedades.

1) $\operatorname{multideg}(fg) = \operatorname{multideg}(f) + \operatorname{multideg}(g)$.

2) Si $f+g \neq 0$, entonces $\operatorname{multideg}(f+g) \le \operatorname{máx}(\operatorname{multideg}(f), \operatorname{multideg}(g))$. Además, si $\operatorname{multideg}(f) \neq \operatorname{multideg}(g)$, entonces se cumple la igualdad.

Ejercicio 6. Demuestre que para ideales monomiales $I, J \in k[x_1, \ldots, x_n]$ los ideales $IJ, I+J, I \cap J$ son también monomiales.

Ejercicio 7. Demuestre que el lema de Dickson es equivalente al siguiente resultado: para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}^n$ existe un número finito de elementos $\alpha(1), \ldots, \alpha(s) \in A$ tales que para todo $\alpha \in A$ se tiene $\alpha = \alpha(i) + \gamma$ para algún $i = 1, \ldots, s$ y $\gamma \in \mathbb{N}^n$.

Ejercicio 8. Para un ideal monomial I digamos que un conjunto de generadores $\{x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)}\}$ es **minimal** si $x^{\alpha(i)} \nmid x^{\alpha(j)}$ para $i \neq j$. Demuestre que todo ideal monomial posee un conjunto de generadores minimal y este es único.

Ejercicio 9. Consideremos los ideales monomiales

$$I_j := (x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n], \quad j = 1, \ldots, n,$$

donde $\widehat{x_j}$ significa que x_j se omite de la lista. Encuentre el conjunto de generadores minimal para el ideal

$$I_1 \cap \cdots \cap I_n.$$

Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos $(x_2) \cap (x_1) = (x_1 x_2)$; para $n = 3$ tenemos

$$(x_2, x_3) \cap (x_1, x_3) \cap (x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$$

(¡demuéstrelo!), etcétera.

Ejercicio 10. Fijemos un vector $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que los números u_i son positivos y linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Demuestre que

$$x^\alpha \prec_u x^\beta \iff u \cdot \alpha < u \cdot \beta,$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar habitual, define un orden monomial. ¿Qué sucede si los u_i no son linealmente independientes?