Álgebra computacional. Tarea 4. Fecha límite: 21/05/2019
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Se puede usar Macaulay2 para *comprobar* algunos cálculos, pero hay que justificar todas las respuestas.

Descomposiciones primarias

Ejercicio 1. Demuestre que en el anillo $A = \mathbb{Z}[x]$ el ideal $\mathfrak{m} := (2, x)$ es maximal y el ideal $\mathfrak{q} = (4, x)$ es $\mathfrak{m}$-primario, pero no es una potencia de $\mathfrak{m}$.

Ejercicio 2. Para dos ideales I e $J = (f_1, \ldots, f_s)$, demuestre que

$$(I : J) = \bigcap_{1 \le i \le s} (I : f_i),$$

y para $f \ne 0$ se tiene

$$(I : f) = \left\{ \frac{g}{f} \;\middle|\; g \in I \cap (f) \right\}.$$

Ejercicio 3. Calcule el ideal cociente $(I : J)$ para $I = (xy^2, x^2 z)$ y $J = (xy, z)$ en el anillo $k[x, y, z]$.

Ejercicio 4. Demuestre que si I es un ideal radical, entonces I no tiene ideales asociados encajados.

Ejercicio 5. Consideremos el ideal monomial $I = (x^2, xy^2 z, yz^2) \subset k[x, y, z]$.

1) Encuentre una descomposición primaria minimal para I.

2) Encuentre los primos asociados.

3) Exprese cada primo asociado como $\mathfrak{p} = (I : f)$ para algún polinomio $f \in k[x, y, z]$.

4) Encuentre los primos minimales y encajados correspondientes.

5) ¿Cómo se ve el conjunto algebraico $\mathbf{V}(I) \subset \mathbb{A}^3(k)$?

Ejercicio 6. Para un anillo A y un ideal $I \subseteq A$, denotemos por $I[x] \subseteq A[x]$ el ideal formado por los polinomios con coeficientes en I. Demuestre las siguientes propiedades.

1) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo en A, entonces $\mathfrak{p}[x]$ es un ideal primo en $A[x]$.

2) Si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario en A, entonces $\mathfrak{q}[x]$ es un ideal $\mathfrak{p}[x]$-primario en $A[x]$.

3) Si $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$ es una descomposición primaria minimal en A, entonces $I[x] = \mathfrak{q}_1[x] \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s[x]$ es una descomposición primaria minimal en $A[x]$.

4) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal asociado a I, entonces $\mathfrak{p}[x]$ es un ideal primo minimal asociado a $I[x]$.

Ejercicio 7. Demuestre que en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ para los ideales primos $\mathfrak{p}_i := (x_1, \ldots, x_i)$ (donde $i = 1, \ldots, n$) todas las potencias $\mathfrak{p}_i^m$ son ideales primarios.

Dimensión

Ejercicio 8. Demuestre que si $X \neq \emptyset$ es un espacio noetheriano y $Z_1, \ldots, Z_s$ son sus componentes irreducibles, entonces

$$\dim X = \text{máx}\{\dim Z_1, \ldots, \dim Z_s\}.$$

Ejercicio 9. Demuestre que para un subespacio $Y \subseteq X$ se tiene

$$\dim Y \leq \dim X.$$

Ejercicio 10. Sean A un anillo e $I \subseteq A$ un ideal. Demuestre que $\dim(A/I) \leq \dim A$.

Ejercicio 11. Demuestre que para el producto de dos anillos se tiene

$$\dim(A \times B) = \text{máx}\{\dim A, \dim B\}.$$

Ejercicio 12. Sea k un cuerpo. Demuestre que el anillo de las series formales $k[[x]]$ y el anillo de polinomios de Laurent $k[x, x^{-1}]$ tienen dimensión 1.

Ejercicio 13. Demuestre que el anillo $\mathbb{Z}[x]$ tiene dimensión 2.

Ejercicio 14. Encuentre la dimensión de las k-álgebras

$$k[x, y, z]/(xz, xy - 1), \quad k[x, y, z, w]/(zw - y^2, xy - z^3)$$

usando la eliminación de variables.