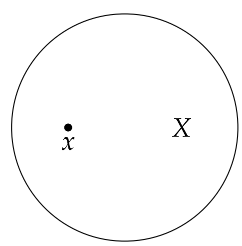
Capítulo 0
Conjuntos

Asumo que el lector conozca algunas bases de la teoría de conjuntos elemental. En este capítulo vamos a revisar ciertas propiedades de aplicaciones entre conjuntos. Primero recordemos la notación.

- La cardinalidad de un conjunto X se denota por $|X|$. Vamos a usar esta notación para conjuntos finitos, es decir cuando $|X|$ corresponde a un número natural.
- Si un elemento x pertenece a un conjunto X, se escribe "$x \in X$" o a veces "$X \ni x$".

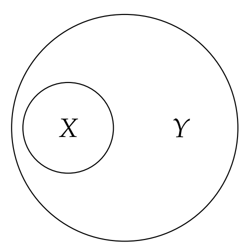


- El **conjunto vacío** se denota por $\emptyset$. Es el conjunto que no tiene ningún elemento:

$$|\emptyset| = 0.$$

- Si un conjunto X está contenido en un conjunto Y, se escribe "$X \subseteq Y$" o "$Y \supseteq X$":

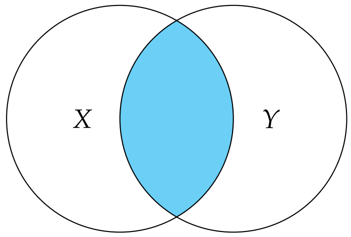
$$x \in X \Rightarrow x \in Y.$$



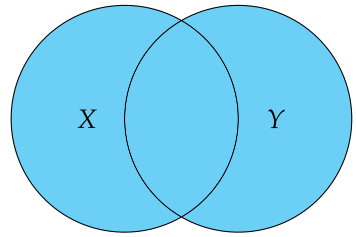
  A veces para subrayar que X está contenido en Y, pero $X \neq Y$, se escribe "$X \subsetneq Y$" o "$Y \supsetneq X$".

- La **intersección** y **unión** de dos conjuntos X y Y se denotan por "$X \cap Y$" y "$X \cup Y$" respectivamente:

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\},$$
$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ o } z \in Y\}.$$



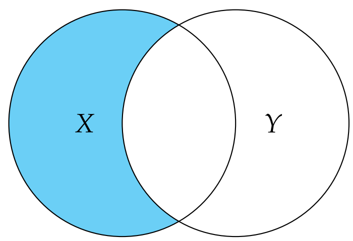
$X \cap Y$



$X \cup Y$

- La **diferencia** entre dos conjuntos X e Y se denota por "$X \setminus Y$":

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$



$X \setminus Y$

0.1 Aplicaciones entre conjuntos

0.1.1. Definición. Para dos aplicaciones $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ la composición $g \circ f\colon X \to Y$ es la aplicación definida por

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Esta información puede representarse mediante un "diagrama conmutativo":

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

0.1.2. Observación. *La composición es **asociativa**: para $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ tenemos*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left, "h\circ g\circ f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & W
\end{tikzcd}$$

0.1.3. Corolario (Asociatividad generalizada). *Para n aplicaciones*

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \to X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$$

Toda manera de poner los paréntesis en la expresión

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$$

(es decir, de calcular la composición) da el mismo resultado.

0.1.4. Ejemplo. Para $n = 3$, tenemos dos posibilidades:

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1, \quad f_3 \circ (f_2 \circ f_1).$$

El resultado es el mismo según 0.1.2. Para $n = 4$ hay 5 posibilidades:

$$((f_4 \circ f_3) \circ f_2) \circ f_1, \quad (f_4 \circ (f_3 \circ f_2)) \circ f_1, \quad (f_4 \circ f_3) \circ (f_2 \circ f_1),$$
$$f_4 \circ ((f_3 \circ f_2) \circ f_1), \quad f_4 \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)).$$

En general, hay

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

posibilidades. Estos números se conocen como los **números de Catalan**[*].

n:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_n:	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

▲

Demostración. Para $n = 2$ no hay que demostrar nada y el caso de $n = 3$ es el contenido de 0.1.2. Para $n > 3$, supongamos que la propiedad se cumple para toda composición de $< n$ aplicaciones. En una expresión $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$, después de poner los paréntesis de algún modo, tenemos

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1),$$

donde las expresiones en los paréntesis están bien definidas por la hipótesis de la inducción. Sea

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_1)$$

otro modo de poner los paréntesis. Sin pérdida de generalidad, $r < s$. Tenemos

$$f_n \circ \cdots \circ f_{r+1} = (f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1})$$

y

$$f_s \circ \cdots \circ f_1 = (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1).$$

Ahora

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1) = \big((f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1})\big) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1)$$

y

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_1) = (f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ \big((f_s \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1)\big).$$

Por inducción, las últimas dos expresiones coinciden. ■

Para cualquier conjunto X, existe una aplicación distinguida $X \to X$, a saber la que aplica todo elemento en sí mismo.

[*] EUGÈNE CHARLES CATALAN (1814–1894), un matemático francés-belga.

0.1.5. Definición. La **aplicación identidad** $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ se define como

$$\mathrm{id}_X(x) := x.$$

0.1.6. Observación. *Para cualesquiera aplicaciones $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ se cumple que*

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g. \tag{0.1}$$

Note que (0.1) define a id_X de modo único: si tenemos dos aplicaciones $i'_X, i''_X\colon X \to X$ tales que para cualesquiera $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ se cumple

$$f \circ i'_X = f, \quad i''_X \circ g = g,$$

en particular para $X = Y$ tenemos

$$i''_X = i''_X \circ i'_X = i'_X.$$

0.1.7. Definición. Se dice que una aplicación $f\colon X \to Y$ es **invertible** si existe otra aplicación $f^{-1}\colon Y \to X$ tal que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y. \tag{0.2}$$

La notación "f^{-1}" está justificada por el hecho de que la aplicación inversa está definida de modo único.

0.1.8. Observación. *Si $f', f''\colon Y \to X$ son dos aplicaciones que satisfacen*

$$f' \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f' = \mathrm{id}_Y, \quad f'' \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f'' = \mathrm{id}_Y,$$

entonces

$$f' = f''.$$

Demostración. Tenemos

$$f' = f' \circ \mathrm{id}_Y = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = \mathrm{id}_X \circ f'' = f''.$$

■

0.1.9. Observación. *Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación invertible, entonces $f^{-1}\colon Y \to X$ es también invertible: su inversa es $f\colon X \to Y$:*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

0.1.10. Observación. *Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ poseen aplicaciones inversas $f^{-1}\colon Y \to X$ y $g^{-1}\colon Z \to Y$, entonces la composición $f^{-1} \circ g^{-1}\colon Z \to X$ es inversa a $g \circ f\colon X \to Z$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & Z \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

En general, toda composición de n aplicaciones invertibles $f_n \circ \cdots \circ f_1$ es también invertible y su aplicación inversa es dada por

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_n^{-1}.$$

Demostración. Tenemos

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z,$$

y de la misma manera,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X.$$

En general, $(f_n \circ \cdots \circ f_1)^{-1}$ se calcula por inducción sobre n. Acabamos de ver el caso de $n = 2$. Para el paso inductivo, escribamos

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)^{-1} = (f_n \circ (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1))^{-1} = (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

■

0.2 Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

0.2.1. Definición. Una aplicación entre conjuntos $f\colon X \to Y$ es

1) **inyectiva** si f aplica diferentes elementos de X en diferentes elementos de Y; es decir, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;

2) **sobreyectiva** si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

3) **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

0.2.2. Observación. *Sean $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ dos aplicaciones. Si f y g son inyectivas (resp. sobreyectivas, biyectivas), entonces $g \circ f$ es también inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).*

Demostración. Inmediato a partir de las definiciones en 0.2.1. ■

0.2.3. Proposición. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos.*

1) f es inyectiva si y solamente si es cancelable por la izquierda: para todo par de aplicaciones $g, g'\colon Z \to X$ tenemos

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'. \tag{0.3}$$

2) f es sobreyectiva si y solamente si es cancelable por la derecha: para todo par de aplicaciones $g, g'\colon Y \to Z$ tenemos

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'. \tag{0.4}$$

3) f es biyectiva si y solamente si f es invertible.

Demostración.

1) Si f es inyectiva, entonces para todo $z \in Z$ tenemos

$$f(g(z)) = f(g'(z)) \Rightarrow g(z) = g'(z),$$

es decir, se cumple (0.3). Luego, para $x, x' \in X$ podemos considerar las aplicaciones

$$\begin{aligned} g\colon \{\bullet\} &\to X, \\ \bullet &\mapsto x, \\ g'\colon \{\bullet\} &\to X, \\ \bullet &\mapsto x'. \end{aligned}$$

La condición (0.3) quiere decir precisamente

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$

es decir, que f es inyectiva.

2) Si f es sobreyectiva, entonces todo $y \in Y$ es de la forma $f(x)$ para algún $x \in X$ y la identidad $g \circ f = g' \circ f$ implica que $g = g'$.

Ahora consideremos dos aplicaciones $g, g'\colon Y \to \{0,1\}$ definidas por

$$g(y) := 1 \quad \text{para todo } y \in Y$$

y

$$g'(y) := \begin{cases} 1, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in X, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Tenemos $g \circ f = g' \circ f$ y la identidad $g = g'$ quiere decir precisamente que f es sobreyectiva.

3) Supongamos que f es una biyección. Esto quiere decir que para todo $y \in Y$ existe único elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Podemos definir entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y &\to X, \\ y &\mapsto x \text{ tal que } f(x) = y, \end{aligned}$$

y esta aplicación satisface (0.2).

Ahora si se cumple (0.2), entonces f es cancelable por la izquierda y por la derecha: para todo $g, g'\colon Z \to X$ tenemos

$$\begin{aligned} f \circ g = f \circ g' \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ g') \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g' \\ \Rightarrow \mathrm{id}_X \circ g = \mathrm{id}_X \circ g' \Rightarrow g = g', \end{aligned}$$

y para cualesquiera $g, g'\colon Y \to Z$ tenemos

$$\begin{aligned} g \circ f = g' \circ f \Rightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = (g' \circ f) \circ f^{-1} \Rightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) = g' \circ (f \circ f^{-1}) \\ \Rightarrow g \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ \mathrm{id}_Y \Rightarrow g = g', \end{aligned}$$

y por lo tanto f es inyectiva y sobreyectiva gracias a 1) y 2).

■

0.2.4. Comentario. Usando 0.2.3, podemos dar otra demostración de 0.2.2. Sean $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ dos aplicaciones.

1) Si f y g son cancelables por la izquierda, entonces la composición $f \circ g$ es también cancelable por la izquierda: para cualesquiera $h, h' \colon W \to X$ tenemos

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \Rightarrow f \circ h = f \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

2) Si f y g son cancelables por la derecha, entonces la composición $f \circ g$ es también cancelable por la derecha: para cualesquiera $h, h' \colon Z \to W$ tenemos

$$h \circ (f \circ g) = h' \circ (f \circ g) \Rightarrow (h \circ f) \circ g = (h' \circ f) \circ g \Rightarrow h \circ f = h' \circ f \Rightarrow h = h'.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & W \end{tikzcd}$$

3) Ya hemos observado en 0.1.10 que la composición de aplicaciones invertibles es también invertible.

0.2.5. Observación. *Sean $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ dos aplicaciones. Consideremos su composición $g \circ f$.*

1) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es también inyectiva.

2) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es también sobreyectiva.

Demostración. Esto debe ser claro en términos de elementos de conjuntos, pero demostrémoslo en términos de aplicaciones cancelables. La aplicación $g \circ f$ es inyectiva precisamente si es cancelable por la izquierda: para todo h, h' tenemos

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

Pero esto implica en particular que f es cancelable por la izquierda:

$$f \circ h = f \circ h' \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

De la misma manera, si $g \circ f$ es sobreyectiva precisamente si es cancelable por la derecha:

$$h \circ (g \circ f) = h' \circ (g \circ f) \Rightarrow h = h'.$$

Pero en este caso g tiene que ser cancelable por la derecha:

$$h \circ g = h' \circ g \Rightarrow h \circ g \circ f = h' \circ g \circ f \Rightarrow h = h'.$$

■

0.3 Caracterización de ∅ y {•}

Las siguientes propiedades son obvias, pero a la vez muy importantes.

0.3.1. Observación (Propiedad universal del conjunto vacío). *Para todo conjunto X existe una aplicación única $\emptyset \to X$.*

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, dashed, "\exists!"] & X \end{tikzcd}$$

0.3.2. Observación (Propiedad universal de un conjunto de un elemento). *Si $\{\bullet\}$ es un conjunto de un elemento, entonces para cualquier conjunto X existe una aplicación única $X \to \{\bullet\}$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \{\bullet\} \end{tikzcd}$$

0.4 Diagramas conmutativos

En nuestro curso vamos a usar muy a menudo diagramas conmutativos. Son dibujos con algunos objetos X, Y, Z y flechas entre ellos como $X \to Y$, tales que las composiciones de las flechas a lo largo de diferentes caminos coinciden. Por ejemplo, si tenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \end{tikzcd}$$

la conmutatividad quiere decir que

$$g \circ f = k \circ h.$$

Si tenemos un triángulo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

su conmutatividad quiere decir que

$$h \circ f = g.$$

Otro ejemplo más interesante:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & W \arrow[l, "j"] \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Aquí la conmutatividad significa que

$$j \circ k = f \quad \text{y} \quad i \circ k = g.$$

0.5 Caracterización de productos y coproductos

Recordemos que para dos conjuntos X y Y su **producto cartesiano** está dado por

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \tag{0.5}$$

y está dotado de dos proyecciones

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_1} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ x & \longleftarrow\!\!\shortmid & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

A partir de ahora, en lugar de "producto cartesiano", vamos a decir simplemente "producto". Por otro lado, la **unión disjunta** de X y Y está dada por

$$X \sqcup Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} \tag{0.6}$$

y está dotada de dos inclusiones

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] & X \sqcup Y & Y \arrow[l, "i_2"'] \\
x \arrow[r, mapsto] & (x,0) & \\
& (y,1) & y \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Notemos que, en cierto sentido, las construcciones de $X \times Y$ e $X \sqcup Y$ no son canónicas. Por ejemplo, hay varias formas de modelar los pares ordenados (x, y), o también en lugar de (0.5) podemos usar otra definición como

$$\{(y, x) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Tampoco está claro por qué (0.5) tiene que ser *el* producto. De la misma manera, en lugar de (0.6) podemos considerar, por ejemplo,

$$\{\smiley\} \times X \cup \{\frownie\} \times Y.$$

En el fondo, el aspecto más importante lo constituyen las *propiedades universales* que satisfacen $X \times Y$ e $X \sqcup Y$.

0.5.1. Observación (Propiedad universal del producto). *Sea Z un conjunto junto con dos aplicaciones $f\colon Z \to X$ y $g\colon Z \to Y$. Entonces, existe una aplicación única $\binom{f}{g}\colon Z \to X \times Y$ tal que*

$$p_1 \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f, \quad p_2 \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g.$$

(0.7)
$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\binom{f}{g}"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración. Se ve que la única opción posible es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\colon Z &\to X \times Y, \\ z &\mapsto (f(z), g(z)). \end{aligned}$$

■

0.5.2. Ejemplo. Consideremos el producto $X \times X$ y dos aplicaciones identidad $\mathrm{id}_X\colon X \to X$:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\binom{\mathrm{id}}{\mathrm{id}}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
X & X \times X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

la aplicación

$$\Delta_X := \begin{pmatrix} \mathrm{id}_X \\ \mathrm{id}_X \end{pmatrix}\colon X \to X \times X$$

caracterizada por

$$p_1 \circ \Delta_X = p_2 \circ \Delta_X = \mathrm{id}_X$$

se llama la **aplicación diagonal**. En términos de los elementos del producto cartesiano $X \times X$ como lo hemos definido arriba, tenemos

$$\Delta_X\colon x \mapsto (x, x).$$

▲

0.5.3. Ejemplo. Para dos aplicaciones $f\colon X \to X'$ y $g\colon Y \to Y'$, tenemos una aplicación

$$f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$$

caracterizada de modo único por

$$p_1' \circ (f \times g) = f \circ p_1, \quad p_2' \circ (f \times g) = g \circ p_2.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X \times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f\times g"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X' & X' \times Y' \arrow[l, "p_1'"'] \arrow[r, "p_2'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

En términos de elementos,

$$f \times g\colon (x,y) \mapsto (f(x), g(y)).$$

▲

0.5.4. Observación (Propiedad universal del coproducto). *Sea Z un conjunto junto con dos aplicaciones $f\colon X \to Z$ y $g\colon Y \to Z$. Entonces, existe una aplicación única $(f,g)\colon X \sqcup Y \to Z$ tal que*

$$(f,g) \circ i_1 = f, \quad (f,g) \circ i_2 = g.$$

(0.8)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\exists!"', "(f,g)"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Demostración. La aplicación tiene que ser dada por

$$\begin{aligned}(f,g)\colon X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} &\to Z,\\ (x,0) &\mapsto f(x),\\ (y,1) &\mapsto g(y).\end{aligned}$$

■

Note que el diagrama (0.8) es casi idéntico a (0.7), solo que las flechas van al revés. En este sentido, el producto y la unión disjunta de conjuntos son construcciones *duales*. Por esto a veces se dice que la unión disjunta es un **coproducto**.

0.6 Propiedades universales

Hemos dicho que 0.3.1, 0.3.2, 0.5.1 y 0.5.4 son **propiedades universales**, porque estas *definen* $\emptyset$, $\{\bullet\}$, $X \times Y$, $X \sqcup Y$ de modo único salvo biyección única. Por ejemplo, supongamos que hay un conjunto T tal que

para todo X existe una aplicación única $X \to T$.

Sea T' otro conjunto que satisface la misma propiedad:

para todo X existe una aplicación única $X \to T'$.

Entonces, deben existir aplicaciones *únicas*

$$T \xrightarrow{\exists! f} T' \quad \text{y} \quad T' \xrightarrow{\exists! g} T.$$

Podemos considerar sus composiciones

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & T' \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T' \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & T \arrow[r, "f"] & T' \end{tikzcd}$$

Pero según las propiedades que hemos supuesto, hay una sola aplicación $T \to T$, y esta debe ser la aplicación identidad id_T. De la misma manera, la única aplicación $T' \to T'$ es $\mathrm{id}_{T'}$. Entonces,

$$g \circ f = \mathrm{id}_T, \quad f \circ g = \mathrm{id}_{T'},$$

y las aplicaciones f y g nos dan una biyección entre T y T'. Por esto cuando escribimos $\{\bullet\}$, no nos interesa qué es exactamente $\bullet$; lo único que importa es que el conjunto $\{\bullet\}$ satisfaga 0.3.2, y esta propiedad define $\{\bullet\}$ salvo biyección única.

Para ver otro ejemplo más interesante de este tipo de razonamiento, consideremos el caso del producto $X \times Y$. Supongamos que hay dos conjuntos W' y W'' junto con algunas aplicaciones

$$X \xleftarrow{p_1'} W' \xrightarrow{p_2'} Y \qquad X \xleftarrow{p_1''} W'' \xrightarrow{p_2''} Y$$

y cada uno satisface la propiedad universal (0.7):

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\binom{f}{g}"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & W' \arrow[l, "p_1'"] \arrow[r, "p_2'"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\binom{f}{g}"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & W'' \arrow[l, "p_1''"] \arrow[r, "p_2''"'] & Y \end{tikzcd}$$

Aplicando estas dos propiedades se obtiene

$$\begin{tikzcd} & W'' \arrow[dl, "p_1''"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\phi"] \arrow[dr, "p_2''"] & \\ X & W' \arrow[l, "p_1'"] \arrow[r, "p_2'"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "p_1'"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\psi"] \arrow[dr, "p_2'"] & \\ X & W'' \arrow[l, "p_1''"] \arrow[r, "p_2''"'] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, existen aplicaciones *únicas*

$$\phi\colon W'' \to W' \quad \text{y} \quad \psi\colon W' \to W''$$

que satisfacen

$$p_1' \circ \phi = p_1'', \quad p_2' \circ \phi = p_2'', \quad p_1'' \circ \psi = p_1', \quad p_2'' \circ \psi = p_2'.$$

Podemos considerar sus composiciones

$$\phi \circ \psi\colon W' \to W', \quad \psi \circ \phi\colon W'' \to W''.$$

Estas satisfacen

$$\begin{aligned} p_1' \circ (\phi \circ \psi) &= (p_1' \circ \phi) \circ \psi = p_1'' \circ \psi = p_1', \\ p_2' \circ (\phi \circ \psi) &= (p_2' \circ \phi) \circ \psi = p_2'' \circ \psi = p_2', \\ p_1'' \circ (\psi \circ \phi) &= (p_1'' \circ \psi) \circ \phi = p_1' \circ \phi = p_1'', \\ p_2'' \circ (\psi \circ \phi) &= (p_2'' \circ \psi) \circ \phi = p_2' \circ \phi = p_2''; \end{aligned}$$

es decir, existen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "p'_1"'] \arrow[d, dashed, "\phi\circ\psi"] \arrow[dr, "p'_2"] & \\ X & W' \arrow[l, "p'_1"'] \arrow[r, "p'_2"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W'' \arrow[dl, "p''_1"'] \arrow[d, dashed, "\psi\circ\phi"] \arrow[dr, "p''_2"] & \\ X & W'' \arrow[l, "p''_1"'] \arrow[r, "p''_2"] & Y \end{tikzcd}$$

Pero las flechas verticales punteadas en los diagramas de arriba también deben ser únicas y por lo tanto coinciden con las aplicaciones identidad:

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{W'}, \quad \psi \circ \phi = \mathrm{id}_{W''}.$$

Entonces, hemos obtenido una biyección única

$$W' \cong W''.$$

Esto significa que no es importante cómo se define $X \times Y$; si hay otro conjunto W que satisface la misma propiedad universal 0.5.1, entre W y $X \times Y$ existe una biyección *canónica*.

Las consideraciones de arriba pueden parecer banales, o más bien una sobrecomplicación innecesaria de algo banal (¿quén no sabe que es el producto cartesiano de dos conjuntos?), pero estas ideas son fundamentales para las matemáticas modernas. Entre el final del siglo XIX y los inicios del siglo XX, una gran revolución sucedió cuando se descubrió que todos los objetos de interés pueden ser modelados en términos de conjuntos. A partir de los años 50 el punto de visto ha cambiado: los objetos suelen definirse en términos de propiedades universales y diagramas conmutativos.

0.7 Relaciones de equivalencia

Para terminar este capítulo, recordemos brevemente la noción de relación de equivalencia que será de mucha importancia en nuestro curso.

0.7.1. Definición. Sea X un conjunto. Una relación binaria $\sim$ sobre X es una **relación de equivalencia** si cumple los siguientes axiomas:

E1) **reflexividad**: para todo $x \in X$ se cumple $x \sim x$;

E2) **simetría**: para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \sim y$, entonces $y \sim x$;

E3) **transitividad**: para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

0.7.2. Ejemplo. Para algún número $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ consideremos la siguiente relación sobre los números enteros $\mathbb{Z}$: se dice que a y b son **congruentes módulo** n y se escribe $a \equiv b \pmod{n}$ si su diferencia es divisible por n:

$$n \mid (a - b) \iff (a - b) = n\,c \text{ para algún } c \in \mathbb{Z}.$$

Esta es una relación de equialencia. De hecho, para todo $a \in \mathbb{Z}$ tenemos $n \mid (a - a)$, ya que el cero es divisible por cualquier n (tenemos $0 = n \cdot 0$). Luego la relación es reflexiva.

Ahora si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $(a - b) = n\,c$ para algún c y luego $(b - a) = n\,(-c)$, así que $b \equiv a \pmod{n}$.

Por fin, si tenemos $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$ y $a_2 \equiv a_3 \pmod{n}$, esto significa que

$$(a_1 - a_2) = n\,c, \quad (a_2 - a_3) = n\,d,$$

y entonces
$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) = (a_1 - a_3) = n \cdot (c + d),$$
y $a_1 \equiv a_3 \pmod{n}$; la relación es transitiva. ▲

0.7.3. Definición. Sea X un conjunto dotado de una relación de equivalencia $\sim$. Para $x \in X$ su **clase de equivalencia** respecto a $\sim$ es el conjunto

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

En este caso también se dice que x **representa** la clase de equivalencia $[x]$. El conjunto de las clases de equivalencia se denota por
$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$
y se dice que es el **conjunto cociente** de X bajo la relación de equivalencia $\sim$.

0.7.4. Observación. *Las clases de equivalencia son disjuntas. Específicamente, para cualesquiera $x, y \in X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $x \sim y$,

2) $[x] = [y]$,

3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Asimismo tenemos la descomposición
$$X = \bigcup_{[x] \in X/\sim} [x],$$
y diferentes conjuntos en la unión son disjuntos.

Demostración. Supongamos que $x \sim y$. Entonces para todo $z \in X$ tenemos (usando que la relación $\sim$ es simétrica y transitiva)
$$z \in [x] \iff x \sim z \Rightarrow y \sim z \iff z \in [y]$$
y de la misma manera
$$z \in [y] \iff y \sim z \Rightarrow x \sim z \iff z \in [x].$$
Esto demuestra que 1) implica 2).

Luego 2) obviamente implica 3), ya que $x \in [x]$, y por lo tanto $[x] \neq \emptyset$. Esto usa la hipótesis de que la relación $\sim$ sea reflexiva.

Por fin, 3) implica 1): si existe $z \in [x] \cap [y]$, entonces $x \sim z$ e $y \sim z$, y por la simetría y transitividad $x \sim y$. ■

0.7.5. Ejemplo. Las clases de equivalencia respecto a la relación de congruencia módulo n pueden ser representadas por diferentes restos módulo n. Vamos a usar la notación

$$[a]_n := \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\}.$$

$$\begin{aligned}
[0]_n &= \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \ldots\}, \\
[1]_n &= \{1, 1 \pm n, 1 \pm 2n, 1 \pm 3n, \ldots\}, \\
[2]_n &= \{2, 2 \pm n, 2 \pm 2n, 2 \pm 3n, \ldots\}, \\
&\vdots \\
[n-1]_n &= \{(n-1), (n-1) \pm n, (n-1) \pm 2n, (n-1) \pm 3n, \ldots\}.
\end{aligned}$$

En este caso el conjunto $\mathbb{Z}/\sim$ se denota por

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}.$$

▲

Técnicamente hablando, $X/\sim$ es un conjunto de subconjuntos de X que son disjuntos y cubren todo X. Sin embargo, hay que pensar en $X/\sim$ como en el conjunto X donde hemos identificado los elementos equivalentes. De todos modos, lo más importante no es la construcción de $X/\sim$ sino su propiedad universal.

0.7.6. Observación (Propiedad universal del cociente $X/\sim$). *Para una relación de equivalencia $\sim$ sobre X, consideremos la aplicación canónica*

$$\begin{aligned} p\colon X &\to X/\sim, \\ x &\mapsto [x]. \end{aligned}$$

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación tal que para cualesquiera $x, x' \in X$ se tiene

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Entonces, f se factoriza de modo único por p:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. La flecha punteada tiene que ser dada por $[x] \mapsto f(x)$. ■

0.7.7. Ejemplo. Consideremos la adición y multiplicación de números enteros módulo n: para dos números a y b calculemos su suma y producto habitual y luego tomemos el resto módulo n correspondiente:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ (a,b) &\mapsto [a+b]_n, \\ \cdot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ (a,b) &\mapsto [ab]_n. \end{aligned}$$

La relación de congruencia módulo n induce de modo obvio una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(a,b) \sim (a',b') \iff a \equiv a' \pmod{n}, \quad b \equiv b' \pmod{n},$$

y el cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$ puede ser identificado con $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Notamos que

$$a \equiv a' \pmod{n}, \quad b \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \pmod{n}.$$

De hecho, si $a - a' = n\,c$ y $b - b' = n\,d$, entonces $(a+b) - (a'+b') = n\,(c+d)$. De la misma manera, tenemos

$$a \equiv a' \pmod{n}, \quad b \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow ab \equiv a'b' \pmod{n}.$$

En efecto, si $n \mid (a - a')$ y $n \mid (b - b')$, entonces n divivde a

$$ab - a'b' = (a - a')\,b + a'\,(b - b').$$

Todo esto significa que la adición y multiplicación pueden ser definidas sobre los restos módulo n:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "+"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "\times"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}
$$

Las flechas punteadas están definidas por

$$
\begin{aligned}
[a]_n + [b]_n &= [a+b]_n, \\
[a]_n \cdot [b]_n &= [ab]_n.
\end{aligned}
$$

▲

Mucho más ejemplos interesantes van a surgir más adelante.