Capítulo 8
Conmutadores y abelianización

En este breve capítulo vamos a estudiar la relación entre los grupos abelianos y no abelianos. A cada grupo G se puede asociar de modo canónico un grupo abeliano G^{ab}, llamado la **abelianización** de G, que es el máximo cociente abeliano de G.

8.1 El subgrupo conmutador $[G, G]$

8.1.1. Definición. Sea G un grupo. Para dos elementos $g, h \in G$ el **conmutador** es el elemento

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}.$$

Note que g y h conmutan ($gh = hg$) si y solamente si $[g, h] = 1$.

Los conmutadores no siempre forman un subgrupo de G. A saber, para un conmutador tenemos obviamente

$$[g, h]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g],$$

pero el producto de dos conmutadores no tiene por qué ser un conmutador. Sin embargo, se puede considerar el subgrupo *generado* por los conmutadores.

8.1.2. Definición. Para un grupo G el **subgrupo conmutador** $[G, G]$ (también conocido como el **subgrupo derivado**) es el subgrupo generado por todos los conmutadores:

$$[G, G] := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle.$$

Obviamente, un grupo G es abeliano si y solamente si todos los conmutadores son iguales a 1, si y solamente si $[G, G] = 1$. Así que todo esto es de interés para grupos no abelianos.

8.1.3. Proposición. *$[G, G]$ es un subgrupo normal en G.*

Demostración. $h \in [G, G]$ y $g \in G$ tenemos

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}h = [g, h]\, h \in [G, G].$$

■

La demostración de arriba es bastante lista: por la definición, los elementos de $[G, G]$ son productos de conmutadores, pero no son necesariamente conmutadores. Sin embargo, en el argumento de arriba no necesitamos considerar un elemento genérico de $[G, G]$, que sería $[g_1, h_1] \cdots [g_n, h_n]$.

8.1.4. Observación. *Homomorfismos preservan conmutadores: si $f\colon G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces*

$$f([g_1,g_2]) = [f(g_1), f(g_2)].$$

8.1.5. Corolario. *Para todo homomorfismo $f\colon G \to H$ tenemos $f([G,G]) \subseteq [H,H]$.*

$$\begin{tikzcd} {[G,G]} \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed] & G \arrow[d, "f"] \\ {[H,H]} \arrow[r, tail] & H \end{tikzcd}$$

8.1.6. Comentario. El centro $Z(G)$ tiene una propiedad parecida a la propiedad del subgrupo conmutador:

1) $Z(G) = G$ si y solamente si G es abeliano,

2) $[G,G] = 1$ si y solamente si G es abeliano.

Sin embargo, el centro no se comporta bien respecto a homomorfismos: una aplicación $f\colon G \to H$ no tiene por qué restringirse a $Z(G) \to Z(H)$. Por ejemplo, para el grupo simétrico S_n se tiene $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ para $n \ge 3$, pero S_n puede contener subgrupos abelianos $G \subset S_n$ donde $Z(G) = G \ne \{\mathrm{id}\}$. Un ejemplo específico nos da $A_3 \subset S_3$.

8.1.7. Observación. *Sea $H \subseteq G$ un subgrupo normal tal que G/H es abeliano. Entonces, $[G,G] \subseteq H$.*

Demostración. Para todo conmutador $[g_1,g_2] \in G$ se tiene necesariamente $[g_1,g_2] \equiv 1 \pmod H$, ya que G/H es abeliano. En otras palabras, $[g_1,g_2] \in H$. ■

Ya se puede notar que $[G,G]$ es el *mínimo* subgrupo normal en G tal que $G/[G,G]$ es un grupo abeliano. Volveremos a esto un poco más adelante, pero primero calculemos $[G,G]$ para algunos grupos específicos.

8.2 Algunos cálculos de $[G,G]$

8.2.1. Ejemplo. Para el grupo diédrico

$$D_n = \{\mathrm{id},\ r,\ r^2,\ \ldots,\ r^{n-1},\ f,\ fr,\ fr^2,\ \ldots,\ fr^{n-1}\}$$

Tenemos

$$[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle.$$

Dejo este cálculo al lector (véase el ejercicio 8.9 abajo). Note que si n es impar, este grupo consiste en todas las rotaciones; si n es impar, este grupo contiene solo la mitad de las rotaciones. ▲

Conmutadores en S_n y A_n

8.2.2. Teorema. *Para el grupo simétrico tenemos*

$$[S_n, S_n] = A_n \quad \textit{para } n \ge 3.$$

Demostración. Para cualesquiera $\sigma, \tau \in S_n$ se cumple

$$\operatorname{sgn}[\sigma,\tau] = \operatorname{sgn}(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau) = +1,$$

entonces $[S_n,S_n] \subseteq A_n$. Ya que S_n no es un grupo abeliano para $n \ge 3$, sabemos que $[S_n,S_n] \ne \{\mathrm{id}\}$. Sin embargo, A_n es el único subgrupo normal propio no trivial de S_n, así que $[S_n,S_n] = A_n$. ■

8.2.3. Comentario. Otro modo de ver que $[S_n, S_n] = A_n$, sin recurrir al resultado sobre los subgrupos normales de S_n, es de expresar cada 3-ciclo como un conmutador

$$[(i\ j), (i\ k)] = (i\ j)\,(i\ k)\,(i\ j)\,(i\ k) = (i\ j\ k)$$

para diferentes i, j, k. Los 3-ciclos generan todo A_n, así que $[S_n, S_n] = A_n$.

8.2.4. Teorema. *Para $n \geq 5$ tenemos*

$$[A_n, A_n] = A_n,$$

mientras que para $n = 4$

$$[A_4, A_4] = V.$$

Demostración. Hay varios modos de verlo. En general, hemos visto que A_n es simple para $n \geq 5$; es decir, no tiene subgrupos normales propios. El conmutador $[A_n, A_n]$ es un subgrupo normal y no es trivial, puesto que el grupo no es abeliano, así que $[A_n, A_n] = A_n$.

En el caso de A_4 notamos que no es abeliano, y por lo tanto su conmutador no es trivial. Un buen candidato sería el único subgrupo normal propio

$$V := \{\mathrm{id}, (1\ 2)\,(3\ 4)\}, \quad \{\mathrm{id}, (1\ 3)\,(2\ 4)\}, \quad \{\mathrm{id}, (1\ 4)\,(2\ 3)\}.$$

El cociente $A_4/V \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es abeliano, lo que implica que $[A_4, A_4] \subseteq V$. Ya que A_4 no es abeliano, tenemos $[A_4, A_4] \neq \{\mathrm{id}\}$. Los únicos subgrupos normales en A_4 son $\{\mathrm{id}\}$, V y todo A_4. ∎

8.2.5. Comentario. Otro modo de ver que $[A_n, A_n] = A_n$ para $n \geq 5$, sin usar la simplicidad de A_n, es de calcular que

$$[(i\ j\ a), (i\ k\ b)] = (i\ j\ a)\,(i\ k\ b)\,(i\ a\ j)\,(i\ b\ k) = (i\ j\ k)$$

para diferentes i, j, k, a, b, y luego recordar que los 3-ciclos generan A_n.

En en caso de $[A_4, A_4] = V$, podemos calcular que

$$[(i\ j\ k), (i\ j\ \ell)] = (i\ j\ k)\,(i\ j\ \ell)\,(i\ k\ j)\,(i\ \ell\ j) = (i\ j)\,(k\ \ell)$$

para diferentes i, j, k, ℓ.

8.2.6. Comentario. Para un grupo G, su **serie derivada** es la sucesión de subgrupos

$$G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq G''' \supseteq \cdots$$

donde

$$G' := [G, G],\ G'' := [G', G'],\ G''' := [G'', G''],\ \ldots$$

Si esta serie termina en algún punto por el grupo trivial, entonces se dice que G es un grupo **resoluble**. El grupo simétrico S_n es resoluble para $n \leq 4$. De hecho, tenemos

$$[S_3, S_3] = A_3,\ [A_3, A_3] = 1$$

y

$$[S_4, S_4] = A_4,\ [A_4, A_4] = V,\ [V, V] = 1.$$

El resultado de 8.2.4 dice que S_n no es resoluble para $n \geq 5$: en este caso

$$[S_n, S_n] = A_n,\ [A_n, A_n] = A_n.$$

De la irresolubilidad de S_n para $n \geq 5$ Galois demostró la imposibilidad de expresar las soluciones de la ecuación general de grado $n \geq 5$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

aplicando únicamente las operaciones básicas y extracción de raíces a los coeficientes a_i. Este célebre resultado es conocido como el **teorema de Abel–Ruffini** ya que el matemático italiano Paolo Ruffini (1765–1822) obtuvo una demostración incompleta en 1799 y Abel proporcionó una prueba en 1823. Galois encontró su demostración de manera independiente, pero esta fue publicada póstumamente en 1846. La teoría desarrollada por Galois motivó muchos conceptos de la teoría de grupos, y por sí mismo, es una piedra angular de la teoría de números.

En este curso no vamos a hablar más de grupos resolubles, ni, lamentablemente, de la teoría de Galois.

Conmutadores en $\mathrm{GL}_n(k)$ y $\mathrm{SL}_n(k)$

Ahora nos gustaría calcular el subgrupo conmutador para el grupo lineal general $\mathrm{GL}_n(k)$ y el grupo lineal especial $\mathrm{SL}_n(k)$ donde k es un cuerpo. Primero, necesitamos algunos resultados auxiliares sobre las matrices elementales. Para $1 \leq i \neq j \leq n$ y $\lambda \in k$ una **matriz elemental** viene dada por

$$E_{ij}(\lambda) := I + \lambda\, e_{ij}.$$

En otras palabras, es la matriz que tiene 1 en la diagonal, λ en la posición (i, j) afuera de la diagonal, y ceros en las demás entradas.

Dejo el siguiente cálculo al lector.

8.2.7. Lema. *Las matrices elementales satisfacen las siguientes propiedades.*

1) *La multiplicación de una matriz $A \in M_n(k)$ por la matriz elemental $E_{ij}(\lambda)$ por la izquierda (donde $i \neq j$) tiene el siguiente efecto: a la fila i se le suma la fila j multiplicada por λ:*

$$E_{ij}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{i,n-1} & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{j,n-1} & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} + \lambda x_{j1} & x_{i2} + \lambda x_{j2} & \cdots & x_{i,n-1} + \lambda x_{j,n-1} & x_{in} + \lambda x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{j,n-1} & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

2) *Toda matriz elemental es invertible, y su inversa viene dada por $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$.*

3) *Si i, j, k son índices diferentes, entonces*

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(\mu)] = E_{ik}(\lambda\mu).$$

8.2.8. Lema. *El grupo $\mathrm{SL}_n(k)$ puede ser generado por las matrices elementales $E_{ij}(\lambda)$ donde $1 \le i \ne j \le n$, $\lambda \in k$.*

Demostración. Esto es esencialmente el método de eliminación gaussiana. Sea $A = (x_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(k)$. Primero, multiplicando A por matrices elementales, podemos lograr que $x_{11} = 1$. En efecto, si $x_{i1} \ne 0$ para algún $i = 2, 3, \ldots, n$, entonces podemos sumar a la primera fila la i-ésima fila multiplicada por el coeficiente λ apropiado. Si $x_{i1} = 0$ para todo $i = 2, 3, \ldots, n$, entonces tenemos $x_{11} \ne 0$ y podemos sumar a la i-ésima fila para algún $i = 2, 3, \ldots, n$ la primera fila, lo que nos deja en la situación considerada.

Ahora cuando $x_{11} = 1$, podemos restar de las otras filas la primera fila multiplicada por los coeficientes λ apropiados y obtener $x_{i1} = 0$ para todo $i = 2, 3, \ldots, n$. Repitiendo este proceso para las filas $i = 2, 3, \ldots, n$, podemos reducir A a una matriz de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & x'_{12} & x'_{13} & \cdots & x'_{1,n-1} & x'_{1n} \\ 0 & 1 & x'_{23} & \cdots & x'_{2,n-1} & x'_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & x'_{2,n-1} & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ya que $\det E_{ij}(\lambda) = 1$, nuestras operaciones no afectan el determinante de la matriz, así que $\det A' = \det A = 1$ y necesariamente $x'_{nn} = 1$. Entonces A' es una matriz triangular superior con 1 en la diagonal.

Ahora, podemos restar de las primeras $n-1$ filas la última fila multiplicada por los coeficientes apropiados y obtener $x'_{1n} = x'_{2n} = \cdots = x'_{n-1,n} = 0$. De la misma manera, restando la fila $n-1$, podemos obtener $x'_{1,n-1} = x'_{2,n-1} = \cdots = x'_{n-2,n-1} = 0$, etcétera. Esto nos dejará con la matriz identidad.

Podemos concluir que $E \cdot A = I$, donde E es un producto de matrices elementales que corresponden a las operaciones con las filas. Luego, $A = E^{-1}$. ∎

8.2.9. Teorema. *Si k es un cuerpo, entonces tenemos para $n \ge 2$*

$$[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k), \quad [\mathrm{SL}_n(k), \mathrm{SL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k)$$

con las siguientes excepciones:

1) *si $n = 2$ y $k = \mathbb{F}_2$, entonces*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

y $[S_3, S_3] = A_3$;

2) *si $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$, entonces*

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)] \cong Q_8.$$

Demostración. Primero notamos que para cualesquiera $A, B \in \mathrm{GL}_n(k)$ se tiene

$$\det[A, B] = \det(A\,B\,A^{-1}\,B^{-1}) = \det(A)\,\det(B)\,\det(A)^{-1}\,\det(B)^{-1} = 1,$$

así que $[A, B] \in \mathrm{SL}_n(k)$. Esto significa que $[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] \subseteq \mathrm{SL}_n(k)$. Ya que el grupo $\mathrm{SL}_n(k)$ está generado por las matrices elementales, para concluir que $[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] = [\mathrm{SL}_n(k), \mathrm{SL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k)$, sería suficiente expresar toda matriz elemental como un conmutador. Si $n \geq 3$, entonces para todo $1 \leq i \neq k \leq n$ podemos escoger otro índice diferente j y luego

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(1)] = E_{ik}(\lambda).$$

Esto establece el teorema para cualquier $n \geq 3$ y cualquier k.

Ahora si $n = 2$ y si $|k| > 3$, entonces existe un elemento $\mu \in k^\times$ tal que $\mu^2 \neq 1$[*]. Luego, un cálculo directo nos dice que toda matriz elemental $E_{12}(\lambda)$ es un conmutador de matrices en $\mathrm{SL}_n(k)$:

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [A, B], \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/(\mu^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y de la misma manera,

$$E_{21}(\lambda) = E_{12}(\lambda)^t = [A, B]^t = [B^{-t}, A^{-t}].$$

Si $|k| = 3$; es decir, si $k = \mathbb{F}_3$, toda matriz elemental todavía puede ser expresada como un conmutador *de matrices en* $\mathrm{GL}_n(k)$:

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [A, B], \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(en $\mathbb{F}_3$ tenemos $2 \neq 0$, así que el término $\lambda/2$ tiene sentido). Notemos que $B \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, y de hecho para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ las matrices elementales salvo $E_{12}(0) = E_{21}(0) = I$ no son conmutadores. Nos quedan entonces dos casos excepcionales.

1) Si $n = 2$ y $k = \mathbb{F}_2$, entonces

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

y $[S_3, S_3] = A_3$. En términos de matrices,

$$[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2), \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) Si $n = 2$ y $k = \mathbb{F}_3$, entonces para calcular $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)]$, notamos que

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)| = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)| = \frac{1}{2} \cdot (3^2 - 1)(3^2 - 3) = 24.$$

En $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ hay un subgrupo normal H generado por las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

que es isomorfo al grupo de cuaterniones Q_8.

$$IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J, \quad I^2 = J^2 = K^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)/H| = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)|/|H| = 24/8 = 3, \text{ así que } \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

[*]En efecto, en un cuerpo la ecuación $x^2 = 1$ tiene a lo sumo dos soluciones y son ± 1. En el cuerpo $\mathbb{F}_2$ es una sola solución $1 = -1$; en el cuerpo $\mathbb{F}_3$ tenemos $\mathbb{F}_3^\times = \{1, 2\} = \{1, -1\}$, y cuando $|k| > 3$, habrá algún $x \neq 0$ tal que $x \neq \pm 1$.

el cual es un grupo abeliano; esto demuestra que

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)] \subseteq H.$$

Además, los generadores de H pueden ser expresados como conmutadores:

$$I = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right], \quad J = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad K = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

y por lo tanto

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)] \cong Q_8.$$

■

8.2.10. Comentario. Hemos encontrado un isomorfismo excepcional $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$. Podemos preguntarnos si otros grupos $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$ pueden ser isomorfos a S_n para algunos m, q, n. La respuesta es negativa.

1) Primero, para $q \neq 2$ el centro $Z(\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q))$ consiste en las matrices escalares y no es trivial, mientras que $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$. Esto implica que $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q) \not\cong S_n$ para $q \neq 2$.

2) Si $q = 2$, podemos calcular los subgrupos conmutadores: si $m \neq 2$, entonces

$$[\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_2), \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_2)] = \mathrm{SL}_m(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_2),$$

mientras que

$$[S_n, S_n] = A_n \neq S_n.$$

De hecho, en la parte 2) también se puede acudir a un argumento elemental aritmético y probar que $|\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_2)|$ no es un factorial para $m \geq 3$ (por ejemplo, bastaría considerar la valuación 2-ádica y 3-ádica de $|\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_2)|$ y compararlas con las correspondientes valuaciones de $n!$).

8.2.11. Ejemplo. He aquí un ejemplo curioso* de cuándo un elemento del subgrupo conmutador no se expresa como un conmutador. Tenemos $-I \in [\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})] = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Supongamos que

$$-I = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Para algunos $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Entonces,

$$-B = ABA^{-1},$$

y luego

$$-\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(-B) = \operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(B),$$

así que $\operatorname{tr} B = 0$. Puesto que $\det B = 1$ y $\operatorname{tr} B = 0$, tenemos

$$C\,B\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: B'$$

para alguna matriz C. Podemos reemplazar A por la matriz

$$A' := C\,A\,C^{-1}.$$

*https://mathoverflow.net/questions/44269

Ya que $AB = -BA$, tenemos también $A'B' = -B'A'$; es decir, $[A', B'] = -I$. Escribamos

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$A'^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

y se calcula que

$$[A', B'] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Pero esta matriz no puede ser igual a $-I$. ▲

8.2.12. Comentario. Si en lugar de un cuerpo k se considera un anillo conmutativo R, el cálculo de $[\mathrm{GL}_n(R), \mathrm{GL}_n(R)]$ y $[\mathrm{SL}_n(R), \mathrm{SL}_n(R)]$ pertenece al terreno de la **teoría K algebraica**, una rama de las matemáticas que nació en los años 50 del siglo pasado.

8.3 Abelianización

Ya que el subgrupo conmutador $[G, G]$ es normal, podemos considerar el cociente correspondiente $G/[G, G]$.

8.3.1. Definición. El grupo $G/[G, G]$ se llama la **abelianización** de G y se denota por G^{ab}.

Note que si G ya es abeliano, entonces $[G, G] = 1$ y $G^{ab} \cong G$.

8.3.2. Observación. *Para todo grupo G, su abelianización $G^{ab} := G/[G, G]$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Los elementos G^{ab} son de la forma

$$\overline{g} := g \mod [G, G] \quad \text{para algún } g \in G.$$

Luego, $\overline{g}, \overline{h}$ conmutan si y solamente si $[\overline{g}, \overline{h}] = \overline{1}$, pero tenemos siempre $[\overline{g}, \overline{h}] = \overline{[g, h]}$ donde $[g, h] \in [G, G]$, así que $[\overline{g}, \overline{h}] = \overline{1}$ para cualesquiera $\overline{g}, \overline{h} \in G^{ab}$. ■

8.3.3. Proposición (Propiedad universal de la abelianización). *Sea $f\colon G \to A$ un homomorfismo entre un grupo G y un grupo abeliano A. Entonces, f se factoriza de modo único por el epimorfismo canónico $G \twoheadrightarrow G^{ab} := G/[G, G]$:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & A \\ G^{ab} \arrow[ur, dashed, "\exists!"', "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

$$f = \overline{f} \circ p.$$

Demostración. Como notamos en 8.1.5, tenemos $f([G, G]) \subseteq [A, A]$. Ya que A es abeliano, el grupo $[A, A]$ es trivial y luego $[G, G] \subset \ker f$. La factorización canónica por $G^{ab} := G/[G, G]$ existe gracias a la propiedad universal del cociente. ■

8.3.4. Corolario (Funtorialidad de la abelianización). *Todo homomorfismo de grupos $f\colon G \to H$ desciende de modo único a un homomorfismo de grupos $f^{ab}\colon G^{ab} \to H^{ab}$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & H \arrow[d, two heads] \\ G^{ab} \arrow[r, dashed, "\exists!", "f^{ab}"'] & H^{ab} \end{tikzcd}$$

Además,

$$\operatorname{id}_G^{ab} = \operatorname{id}_{G^{ab}},$$

y para homomorfismos $f\colon G \to H$ y $g\colon H \to K$ tenemos

$$(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}.$$

Demostración. La flecha punteada existe y es única gracias a la propiedad universal de G^{ab} aplicada a la composición $G \xrightarrow{f} H \twoheadrightarrow H^{ab}$.

Para el homomorfismo identidad $\operatorname{id}\colon G \to G$ en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\operatorname{id}"] \arrow[d, two heads] & G \arrow[d, two heads] \\ G^{ab} \arrow[r, dashed, "\exists!"] & G^{ab} \end{tikzcd}$$

la flecha punteada tiene que ser el homomorfismo identidad $\operatorname{id}\colon G^{ab} \to G^{ab}$ por la unicidad. De la misma manera, en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & H \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads] & K \arrow[d, two heads] \\ G^{ab} \arrow[r, dashed, "\exists! f^{ab}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\exists!(g\circ f)^{ab}"'] & H^{ab} \arrow[r, dashed, "\exists! g^{ab}"] & K^{ab} \end{tikzcd}$$

gracias a la unicidad, necesariamente $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$. ■

8.3.5. Ejemplo.

1) Para el grupo diédrico tenemos

$$(D_n)^{ab} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong V, & \text{si } n \text{ es par}. \end{cases}$$

—haga el ejercicio 8.9.

2) Puesto que $[S_n, S_n] = A_n$ para $n \geq 3$ (véase 8.2.2), la abelianización del grupo simétrico S_n viene dada por

$$(S_n)^{ab} = \begin{cases} \{\operatorname{id}\}, & \text{si } n = 0, 1, \\ S_n/A_n \cong \{\pm 1\}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

3) Puesto que $[A_n, A_n] = A_n$ para $n \geq 5$ y $[A_4, A_4] = V$, la abelianización del grupo alternante A_n es

$$(A_n)^{ab} \cong \begin{cases} \{\text{id}\}, & \text{si } n = 0, 1, 2, \\ A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & \text{si } n = 3, \\ \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & \text{si } n = 4, \\ \{\text{id}\}, & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$$

4) Para el grupo lineal general $\mathrm{GL}_n(k)$ el resultado de 8.2.9 nos da

$$\mathrm{GL}_n(k)^{ab} \cong k^\times,$$

salvo el caso especial de

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

5) De la misma manera, para $\mathrm{SL}_n(k)$ tenemos

$$\mathrm{SL}_n(k)^{ab} = \{I\},$$

salvo los casos excepcionales

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)^{ab} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)^{ab} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

▲

8.4 Ejercicios

Ejercicio 8.1. *Para un grupo G y su subgrupo H denotemos por $[G, H]$ el subgrupo generado por los conmutadores $[g, h]$ donde $g \in G$ y $h \in H$. Demuestre que $[G, H] \subseteq H$ si y solamente si H es un subgrupo normal.*

Ejercicio 8.2. *En A_5 tenemos $[(1\,2\,4), (1\,3\,5)] = (1\,2\,3)$. De modo similar, exprese las permutaciones $(1\,2)\,(3\,4)$ y $(1\,2\,3\,4\,5)$ como conmutadores.*

Ejercicio 8.3. *Para las matrices elementales $E_{ij}(\lambda) := I + \lambda\, e_{ij}$ demuestre que*

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(\mu)] = E_{ik}(\lambda\mu)$$

donde i, j, k son índices diferentes.

Ejercicio 8.4. *Encuentre todos los homomorfismos $S_n \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Ejercicio 8.5. *Sea $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un epimorfismo de grupos. Demuestre que $f^{ab}\colon G^{ab} \to H^{ab}$ es también un epimorfismo. Demuestre que si $f\colon G \rightarrowtail H$ es un monomorfismo, entonces $f^{ab}\colon G^{ab} \to H^{ab}$ no es necesariamente un monomorfismo (encuentre un contraejemplo especifico).*

Ejercicio 8.6. *Consideremos la aplicación*

$$\begin{gathered} \operatorname{Hom}(G, H) \to \operatorname{Hom}(G^{ab}, H^{ab}), \\ f \mapsto f^{ab}. \end{gathered}$$

Demuestre que no es ni inyectiva, ni sobreyectiva en general (encuentre contraejemplos).

Indicación: para ver que no es sobreyectiva, considere $G = \{\pm 1\}$ y $H = Q_8$.

Ejercicio 8.7. *Sea k un cuerpo. Consideremos el grupo*

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in k \right\}.$$

1) *Calcule el subgrupo conmutador $[G, G]$.*

2) *Demuestre que la abelianización G^{ab} es isomorfa al grupo aditivo*

$$k^2 = \{(a, c) \mid a, c \in k\}.$$

Ejercicio 8.8. *Calcule la abelianización del grupo de cuaterniones Q_8.*

Ejercicio 8.9. *Para el grupo diédrico*

$$D_n = \{\mathrm{id},\ r,\ r^2,\ \ldots,\ r^{n-1},\ f,\ fr,\ fr^2,\ \ldots,\ fr^{n-1}\}$$

1) *calcule que $[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle$;*

2) *calcule $(D_n)^{ab}$.*

Ejercicio 8.10. *El grupo diédrico D_n permuta los vértices del n-ágono regular y esto nos da un monomorfismo natural $f\colon D_n \to S_n$. Calcule el homomorfismo correspondiente $f^{ab}\colon (D_n)^{ab} \to (S_n)^{ab}$.*