Ejercicios de la teoría de números

Alexey Beshenov

09/11/2021

Recordatorio de la vez pasada (!)

IWYMIC 2002: Encuentre el número de las soluciones enteras de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}.$$

Dé alguna solución particular.

Cuadrados

IWIMIC 2005: Encuentre todos los enteros x tales que x e $x + 45$ son cuadrados.

Divisibilidad por un número compuesto

Demuestre que el número

$$f(n) = 23^n + 12^n - 32^n - 3^n$$

es divisible por 35 para todo $n \geq 1$ impar.

Tarea

IWYMIC 2006: Demuestre que el número

$$1596^n + 1000^n - 270^n - 320^n$$

es divisible por 2006 para todo $n \geq 1$ impar.

Contando potencias

- ¿Cuántos números enteros $x \leq N$ son k-ésimas potencias?
- ¿Cuántos números $x \leq N$ no son cuadrados, ni cubos?

Contando potencias (cont.)

IWYMIC 2005: Consideremos la sucesión de los números enteros que no son cuadrados ni cubos:

$$2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots$$

Encuentre el término número 1000.

Tarea

- ¿Cuántos números $x \leq N$ no son cuadrados, ni cubos, ni quintas potencias?
- ¿Cuál es el término número 4321 en la sucesión correspondiente?

Sumas de dos cuadrados

Resuelve la congruencia $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ para $p = 5, 7, 11, 13$.

Sumas de dos cuadrados (cont.)

Para un primo impar p, demuestre que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ tiene soluciones si y solo si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

* Sugerencia: *existe una raíz primitiva a tal que* $a, a^2, \ldots, a^{p-2}, a^{p-1} \equiv 1$ *son todos los residuos no nulos mód p.*

Sumas de dos cuadrados (cont.) / Tarea

Sea p un primo impar. Demuestre que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ tiene soluciones no triviales $(x, y) \not\equiv (0, 0) \pmod{p}$ si y solo si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Sumas de dos cuadrados (cont.) / Tarea

IWYMIC 2004: ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x^2 + y^2 - 16y = 2004$?

Tarea

Verifique si $x^2 + y^2 - 16y = 2020$ tiene soluciones.
* Difícil: ¿Cuántas son en total?

Lectura adicional: «El Libro de las Demostraciones», cap. 4, Representación de enteros como suma de dos cuadrados.